

THÈSES

présentées

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

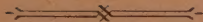
pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

(Mention Sciences)

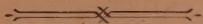
par

Guy BONNET



1^{re} THÈSE : Contribution à l'étude des anomalies magnétiques
provoquées par un corps de révolution.
Application au volcan Nyiragongo.

2^e THÈSE : Propositions données par la Faculté.



Soutenues le 9 juin 1962 devant la Commission d'examen.

M. E. THELLIER Président

M. L. CAGNIARD	}	Examineurs
M. E. LEBORGNE		

THÈSES

présentées

**A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS**

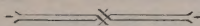
pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

(Mention Sciences)

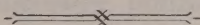
par

Guy BONNET



**1^{re} THÈSE : Contribution à l'étude des anomalies magnétiques
provoquées par un corps de révolution.
Application au volcan Nyiragongo.**

2^e THÈSE : Propositions données par la Faculté.



Soutenues le 9 juin 1962 devant la Commission d'examen.

M. E. THELLIER Président

M. L. CAGNIARD

M. E. LEBORGNE

} Examinateurs

THÈSES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ



AVANT-PROPOS

En 1959 le Centre National de Volcanologie de Belgique organisait, conjointement avec l'Institut pour la Recherche Scientifique en Afrique Centrale, une mission géophysique au volcan Nyiragongo situé sur la grande cassure africaine, au nord du lac Kivu (1° S, 29° E), et qui a actuellement un lac de lave en fusion aisément accessible.

A la demande du Professeur I. DE MAGNÉE, Président du Centre National de Volcanologie, et du Professeur P. EVRARD, Directeur de ce Centre, je devais effectuer, entre le 23 août et le 13 septembre, le levé magnétique en stations rapprochées de la plate-forme supérieure du cratère. Ce programme, qui avait pour but de préciser les fortes anomalies de la composante verticale observées en 1958, fut largement dépassé.

Grâce à une préparation suffisante du travail, les valeurs approximatives de Z étaient calculées chaque jour, permettant de tracer les courbes isodynames. Devant la cohérence des premiers résultats obtenus, le Professeur P. EVRARD, Chef de la Mission, m'autorisa à étendre le levé à la plate-forme inférieure et au *crag* * jusqu'à quelques mètres du lac de lave.

Le levé a ainsi couvert une superficie de 67 ha à l'intérieur du cratère, et une première reconnaissance a pu être faite, en fin de mission, dans le voisinage du volcan.

L'effort a principalement porté sur la mesure de la composante verticale. Sur la plate-forme supérieure du cratère quelques mesures de la composante horizontale furent exécutées suivant un axe Nord-Sud, ainsi qu'un ensemble de mesures cohérentes de la déclinaison. Sur cette même plate-forme, l'enregistrement de la variation diurne était assuré par un variographe Askania.

L'ensemble des valeurs obtenues et des courbes isanomales ayant déjà été publié, je ne donne pas ici davantage de détails

* Le *crag* désigne dans ce Mémoire l'îlot escarpé qui occupe une grande partie du puits central et suit les fluctuations de niveau du lac de lave.

et puis terminer ce bref aperçu de l'activité sur le volcan dans le domaine du magnétisme en mentionnant la prise de quelques échantillons de roches orientés par M. M. VERHAEGHE, géologue.

J'exprime ici toute ma reconnaissance au Centre National de Volcanologie et à l'Institut pour la Recherche Scientifique en Afrique Centrale de m'avoir permis de participer à cette Mission, et remercie tout particulièrement le Professeur P. EVRARD pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail sur le terrain et toutes les facilités qu'il m'a accordées.

Il restait à effectuer l'interprétation des anomalies, qui fait l'objet de la présente étude. Bien que ne traitant que des anomalies de la composante verticale, ce travail, en nécessitant le calcul du champ magnétique de corps de révolution, se révéla long et délicat. Il a été effectué sous la haute direction du Professeur L. CAGNIARD, directeur du Laboratoire de Géophysique Appliquée de l'Université de Paris, qui a bien voulu en suivre le développement et n'a cessé de me prodiguer des suggestions et conseils éclairés. Qu'il veuille bien trouver ici l'expression de ma profonde gratitude.

Cette étude faisant l'objet d'une thèse de Doctorat, je remercie le Professeur E. THELLIER, directeur de l'Institut de Physique du Globe, et M. E. LEBORGNE, physicien, d'avoir bien voulu faire partie du jury.

Mes remerciements vont aussi au Professeur I. DE MAGNÉE pour m'avoir fréquemment communiqué des documents bibliographiques, et à M. L. KOENIGSFELD dont j'ai utilisé, avant leur publication, les résultats d'analyse des échantillons prélevés par M. VERHAEGHE.

Et je ne saurais oublier tous ceux qui m'ont apporté une aide matérielle. Je pense là au Comité de Direction de l'Institut pour la Recherche Scientifique en Afrique Centrale, au Centre National de Volcanologie, au Professeur M. NICOLET, directeur du Centre National de Recherches de l'Espace, au Service Mécanographique de M. L. BOSSY, au Laboratoire de Géophysique Appliquée du Professeur L. CAGNIARD. Que tous veuillent bien trouver ici l'expression de ma vive reconnaissance.

INTRODUCTION

L'interprétation des anomalies magnétiques d'un cône volcanique, ou celle de leur variation dans le temps, a plusieurs fois été faite depuis une trentaine d'années. Interprétation souvent délicate en raison de la présence de laves de nature et d'âge divers. Aussi, dans la grande majorité des cas, les auteurs supposent une aimantation uniforme dont ils déterminent l'intensité à partir d'anomalies de relief. Le calcul de ces dernières est généralement basé sur l'assimilation du cône volcanique à un ou plusieurs ellipsoïdes de révolution superposés ([6], 1938; [4], 1940; [5], 1956) utilisant pour cela les travaux de HAALCK-KOENIGSBERGER sur le champ magnétique d'un ellipsoïde. Ou encore le volcan est assimilé à un trapèze infiniment long étudié suivant une transversale ([8], 1952), ou mieux à un tronc de cône ([9], 1951). Enfin, plus simplement, I. YOKOYAMA imagine une sphère sous-jacente et est ainsi amené à considérer le champ d'un doublet (Nihara, 1957; Stromboli, 1959; Vésuve 1960). Dans l'ensemble, bien que ces méthodes de calcul ne serrent généralement pas d'assez près le relief réel, des résultats cohérents ont été obtenus.

Il n'y aurait, semble-t-il, qu'un intérêt limité à faire notre étude du volcan Nyiragongo si ce n'était le fait d'avoir pu poursuivre le levé magnétique profondément à l'intérieur du cratère (400 mètres) jusqu'au lac de lave. Notre curiosité en faisant ces mesures était bien légitime car nous pouvions espérer, en pénétrant ainsi à l'intérieur du volcan, pouvoir préciser l'importance relative de la masse de lave liquide. A notre connaissance, l'étude de la présence de lave en fusion, par ses effets magnétiques, n'a été faite que pour les volcans Miyakezima ([13], 1940) et Mihara ([10], 1955).

Il est évident que nous ne pourrions envisager des hypothèses sur l'intérieur du volcan qu'après avoir corrigé nos anomalies des influences topographiques. Le relief étant géométriquement

remarquable et relativement simple, nous chercherons à en déterminer l'influence le plus exactement possible.

Décrivons sommairement le volcan Nyiragongo qui est l'un des huit principaux monts de la région des Virunga. Emergeant d'une plaine de laves d'origines diverses, d'altitude 2 200 mètres environ, la base apparente du cône, d'un diamètre de l'ordre de 8 km, est assez difficile à préciser en raison des recouvrements des différentes coulées. Entre cette base et le bord du cratère, situé à 3 425 m d'altitude, les courbes de niveau sont des cercles relativement bien concentriques. Cette forme très régulière est cependant perturbée, au nord et au sud, par deux cônes plus petits, terminés par des cratères ne montrant pas d'activité récente.

Le cratère, constitué de trois puits à peu près coaxiaux pas encore notablement déformés par les éboulements, est d'une régularité assez remarquable. Son ouverture supérieure est légèrement elliptique (axes voisins de 1 150 et 1 010 m). La paroi supérieure a une inclinaison du même ordre que celles observées généralement dans les effondrements qui donnent naissance aux caldères, sa hauteur est ici voisine de 160 mètres. Puis vient la plate-forme supérieure horizontale, entourant un puits de 180 mètres de profondeur dont la paroi a une pente beaucoup plus accentuée que celle de la paroi supérieure. Une plate-forme inférieure termine ce puits, horizontale et très plane elle aussi, dans laquelle un troisième puits à paroi verticale est en partie comblé en surface par un *crag* flottant et laisse apparaître un lac de lave en fusion.

Il ne semble pas utile d'insister ici sur la description de ce cratère décrit longuement par G. SAHAMA et A. MEYER [12]. La *figure 1* ⁽¹⁾, permet d'en avoir une idée concrète, et nous aurons l'occasion par la suite de préciser certains détails pouvant avoir une influence sur le champ magnétique observé.

Du fait que l'ensemble du volcan, tant par sa forme extérieure que par celle de son cratère, présente une approximative symétrie de révolution, il va en résulter une simplification

(1) Tirée de l'excellent levé photogrammétrique de P. WISER [18].

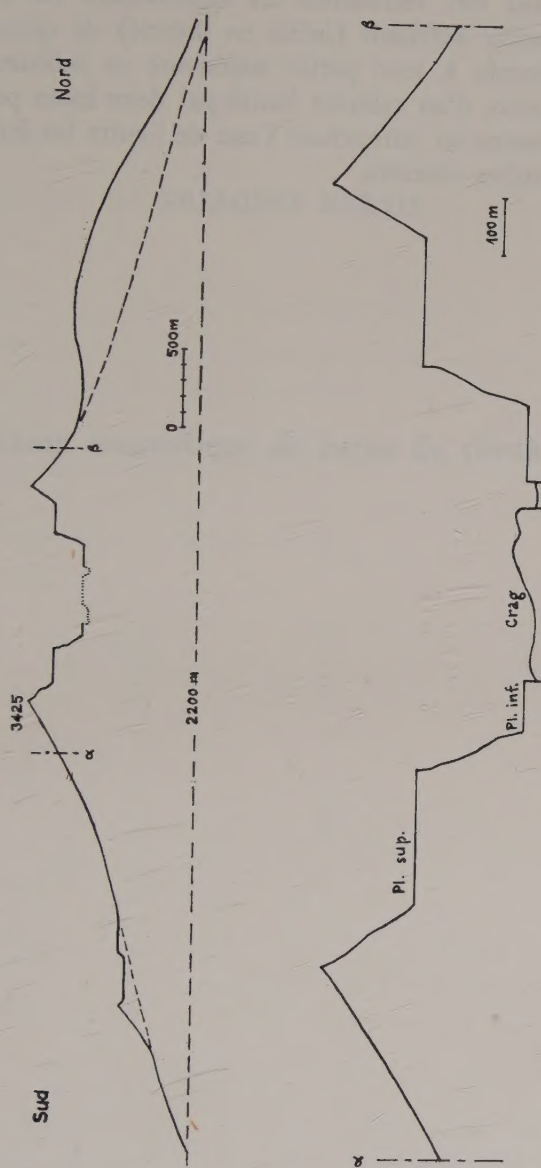


FIG. 1. — Coupe du volcan Nyiragongo en août 1959.

essentielle des calculs d'interprétation. En effet, tout corps de révolution peut être reconstitué en agglomérant les uns aux autres un nombre suffisant (infini en théorie) de cylindres de révolution limités à leur partie supérieure et inférieure. En réalité l'influence d'un cylindre limité par deux bases peut toujours être obtenue en retranchant l'une de l'autre les influences de deux cylindres illimités.

PREMIÈRE PARTIE

Champ magnétique de corps de révolution

CHAPITRE I

Champ magnétique d'un cylindre vertical illimité vers le bas et uniformément aimanté

1. CALCUL DE LA COMPOSANTE VERTICALE ΔZ DU CHAMP

Soit O le point où l'on calcule ΔZ . L'axe Oz est la verticale descendante. Le plan xOz contient le vecteur $\vec{J}$ de composantes J_x, J_z (fig. 2).

Par rapport à $Oxyz$, le centre C de la base circulaire supérieure du cylindre (rayon R) est à l'abscisse x_0 et à la cote ζ_0 positives ou négatives suivant les cas.

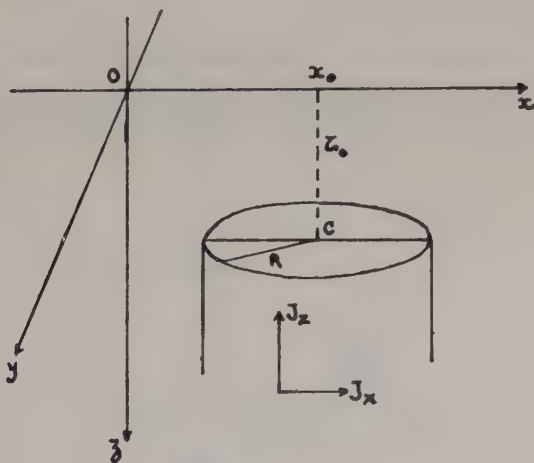


FIG. 2.

ΔZ est fonction de x_0, R, ζ_0 , et dépend en apparence de 3 paramètres indépendants. En fait, des considérations élémentaires de similitude montrent que le nombre de ces paramètres se réduit à 2 car la dilatation de toutes les longueurs dans un même rapport ne change pas la valeur du champ. Nous con-

viendrons donc de poser $R = 1$, de sorte que x_0 et ζ_0 sont en réalité des abscisses et des cotes « réduites ».

Le calcul peut se subdiviser en deux parties. Nous calculerons d'abord le champ qui correspond à une aimantation exclusivement verticale ($\mathcal{I}_x = 0$, $\mathcal{I}_z \neq 0$), puis celui qui correspond à une aimantation uniquement transversale ($\mathcal{I}_x \neq 0$, $\mathcal{I}_z = 0$). Nous obtiendrons ainsi deux (ΔZ) que nous désignerons par $(\Delta Z)^z$ et $(\Delta Z)^x$, respectivement proportionnelles à $\mathcal{I}_z$ et $\mathcal{I}_x$.

Le cas général résultant de la superposition de ces deux effets, nous aurons: $\Delta Z = (\Delta Z)^z + (\Delta Z)^x$.

a) *Influence $(\Delta Z)^z$ de la composante verticale de l'aimantation.*

Le champ est évidemment de révolution puisque l'aimantation est axiale, ce qui nous permet de le calculer dans un méridien quelconque. D'autre part le plan horizontal de C est aussi un plan de symétrie pour le champ en raison du fait que le magnétisme fictif (magnétisme de COULOMB) n'existe que sur la face supérieure du cylindre.

Calculons maintenant en un point P (fig. 3) de coordonnées x, y, z , le champ du cylindre dont le volume est (v) en intégrant le champ de chaque élément de volume dv de coordonnées

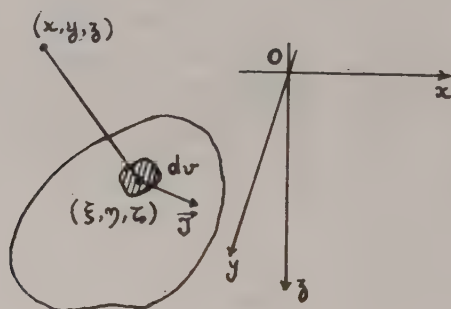


FIG. 3.

ξ, η, ζ . Pour ce faire, nous dériverons le potentiel magnétique V par rapport à x, y, z , et nous particulariserons après coup en plaçant le point P à l'origine 0 où $x = y = z = 0$

$$V = \mathcal{J}_z \iiint_{(v)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} dv \quad (1)$$

$$r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2.$$

La composante verticale de l'anomalie est:

$$\Delta Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

soit:

$$\Delta Z = -\mathcal{J}_z \iiint_{(v)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) dv \quad (2)$$

or:

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \xi}$$

d'où:

$$\Delta Z = \mathcal{J}_z \iiint_{(v)} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right) dv. \quad (3)$$

Nous adopterons (fig. 4) des coordonnées cylindriques R, θ, ζ .

$$\xi = r_0 + R \cos \theta$$

$$\eta = R \sin \theta$$

$$dv = R dR d\theta d\zeta$$

$$0 < \theta < 2\pi \quad 0 < R < 1.$$

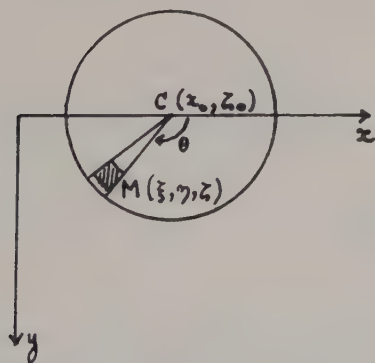


FIG. 4.

Intégrons d'abord en ξ , il vient:

$$\Delta Z = \mathcal{J}_z \int_0^{2\Pi} d\theta \int_0^1 R dR \left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right)_{\xi_0}^{+\infty} \quad (4)$$

En posant $x = y = z = 0$, nous obtenons:

$$\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} \right)_{\xi_0}^{+\infty} = \frac{\xi_0}{(\xi^2 + \eta^2 + \xi_0^2)^{3/2}} \quad (5)$$

et finalement:

$$(\Delta Z)^z = \mathcal{J}_z \int_0^{2\Pi} d\theta \int_0^1 R dR \left[\frac{\xi_0}{(R^2 + 2x_0 R \cos \theta + x_0^2 + \xi_0^2)^{3/2}} \right] \quad (6)$$

L'intégrale en R est de la forme

$$\int \frac{x dx}{X \sqrt{X}} \quad (X = ax^2 + bx + c)$$

dont la valeur

$$-\frac{2(bx + 2c)}{q \sqrt{X}} \quad (q = 4ac - b^2)$$

donne ici:

$$\begin{aligned} & -\xi_0 \left[\frac{x_0 R \cos \theta + x_0^2 + \xi_0^2}{(x_0^2 \sin^2 \theta + \xi_0^2) \sqrt{R^2 + 2x_0 R \cos \theta + x_0^2 + \xi_0^2}} \right]_{R=0}^{R=1} \\ & = -\xi_0 \frac{x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi_0^2}{(x_0^2 \sin^2 \theta + \xi_0^2) \sqrt{1 + 2x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi_0^2}} - \frac{\sqrt{x_0^2 + \xi_0^2}}{x_0^2 \sin^2 \theta + \xi_0^2} \end{aligned}$$

d'où:

$$\begin{aligned} (\Delta Z)^z &= -\xi_0 \mathcal{J}_z \int_0^{2\Pi} \left[\frac{x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi_0^2}{(x_0^2 \sin^2 \theta + \xi_0^2) \sqrt{1 + 2x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi_0^2}} - \frac{\sqrt{x_0^2 + \xi_0^2}}{x_0^2 \sin^2 \theta + \xi_0^2} \right] d\theta \quad (7) \end{aligned}$$

Si le premier terme sous le signe $\int$ est une intégrale elliptique que nous traiterons graphiquement, le second terme peut être rapidement intégré. Nous l'écrivons:

$$I = \frac{1}{x_0^2} \sqrt{x_0^2 + \xi_0^2} \int_0^{2\Pi} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta + \frac{\xi_0^2}{x_0^2}} = \frac{4}{x_0^2} \sqrt{x_0^2 + \xi_0^2} \int_0^{\Pi/2} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta + \frac{\xi_0^2}{x_0^2}} \quad (8)$$

Posons:

$$\cotg \theta = u \quad \text{et} \quad \frac{\xi_0^2}{x_0^2} = \alpha^2$$

$$du = -\frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \quad d\theta = -\sin^2 \theta \, du.$$

Les nouvelles limites d'intégration sont $+\infty$ à 0 (car pour $\theta = 0$ $\cotg = +\infty$ et pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\cotg \theta = 0$) d'où:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin^2 \theta + \frac{\xi_0^2}{x_0^2}} &= \int_{+\infty}^0 -\frac{1}{u^2 + 1} \frac{1}{\frac{1}{u^2 + 1} + \alpha^2} du = \\ &= \int_{+\infty}^0 -\frac{1}{1 + \alpha^2(u^2 + 1)} du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + \alpha^2(u^2 + 1)} du = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^{+\infty} \frac{du}{u^2 + \left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)} \end{aligned}$$

de la forme:

$$\int \frac{dx}{x^2 + m^2} = \frac{1}{m} \operatorname{arctg} \frac{x}{m}$$

alors (8) s'écrit:

$$I = \frac{4\sqrt{x_0^2 + \xi_0^2}}{x_0^2 \alpha^2} \left[\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \arctg \frac{\alpha u}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{4\sqrt{x_0^2 + \xi_0^2}}{\alpha x_0^2 \sqrt{\alpha^2 + 1}} \left[\arctg \frac{\alpha u}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} \right]_0^{+\infty} = \frac{2\Pi}{\xi_0} \quad (9)$$

d'où

$$(\Delta Z)^z = \mathcal{J}_z$$

$$\left[\frac{2\Pi - \xi_0 \int_0^{2\Pi} \frac{(x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi_0^2) d\theta}{(x_0^2 \sin^2 \theta + \xi_0^2) \sqrt{1 + 2x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi_0^2}} \right] \quad (10)$$

REMARQUE:

Pour $x_0 = 0$ le second terme de la quantité entre crochets de (10) devient $\frac{\xi_0}{\sqrt{1 + \xi_0^2}}$ valeur qui tend vers zéro, quand ξ_0 tend vers zéro, d'où la valeur maximum du champ au centre du disque supérieur du cylindre est égale à $2\Pi \mathcal{J}_z$ résultat auquel on devait s'attendre.

CAS PARTICULIERS:

1. Quand le cylindre est à une distance x_0 du point d'observation telle que le champ créé par un volume élémentaire du cylindre ne varie pas avec sa distance à l'axe ni avec l'angle θ , il en résulte une représentation du cylindre par un empilement de disques de volume $\Pi R^2 d\xi$, ayant l'intensité d'aimantation $\mathcal{J}_z$, autrement dit chaque disque représente un doublet de moment

$$\mathcal{M} = \Pi R^2 d\xi \cdot \mathcal{J}_z.$$

La seule variable demeure ξ et le volume élémentaire devient $\Pi R^2 d\xi$, soit $\Pi d\xi$ pour $R = 1$.

Nous obtenons ainsi la formule asymptotique

$$(\Delta Z)^z = \Pi \mathcal{J}_z \frac{\xi_0}{(x_0^2 + \xi_0^2)^{3/2}}$$

qui nous permettra de continuer rapidement le tracé de la courbe pour les valeurs élevées de x_0 .

2. Pour connaître la limite de $(\Delta Z)^z$ pour $\xi_0 = 0$, il n'est pas absolument nécessaire de lever les indéterminations de l'intégrale (10).

Quand 0 est dans le plan horizontal de C et en dehors du cylindre, le champ est horizontal et ΔZ est nulle. Quand 0 tend à venir au contact de la face supérieure du cylindre soit par dessus, soit par dessous, suivant que ξ_0 tend vers zéro par valeurs positives ou négatives, le champ tend vers $\pm 2\Pi \mathcal{J}_z$.

TRACE DES COURBES:

L'intégration graphique a été faite pour différentes valeurs de ξ_0 égales à $2R - 1R - 0,5R - 0,2R - 0,1R$ et 0. Une partie de ces courbes (fig. 5) est en accord avec les courbes correspondantes publiées par L.L. NETTLETON ([7] 1942) en partant de l'aimantation de surface et de l'angle solide formé par la face supérieure du cylindre à partir du point d'observation.

b) *Influence $(\Delta Z)^x$ de la composante transversale de l'aimantation*

Avant de calculer cette influence nous allons montrer qu'elle est la même, pour une aimantation égale, à la composante horizontale du champ $(\Delta X)^z$, due à une aimantation verticale. Cela nous permettra, dans la suite, de bénéficier de l'avantage dû au fait que le champ engendré par $\mathcal{J}_z$ est de révolution.

Si nous comparons, en effet, l'un et l'autre cas, nous obtenons respectivement les potentiels:

$$V^z = \mathcal{J}_z \iiint_{(v)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} dv \quad V^x = \mathcal{J}_x \iiint_{(v)} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \xi} dv.$$

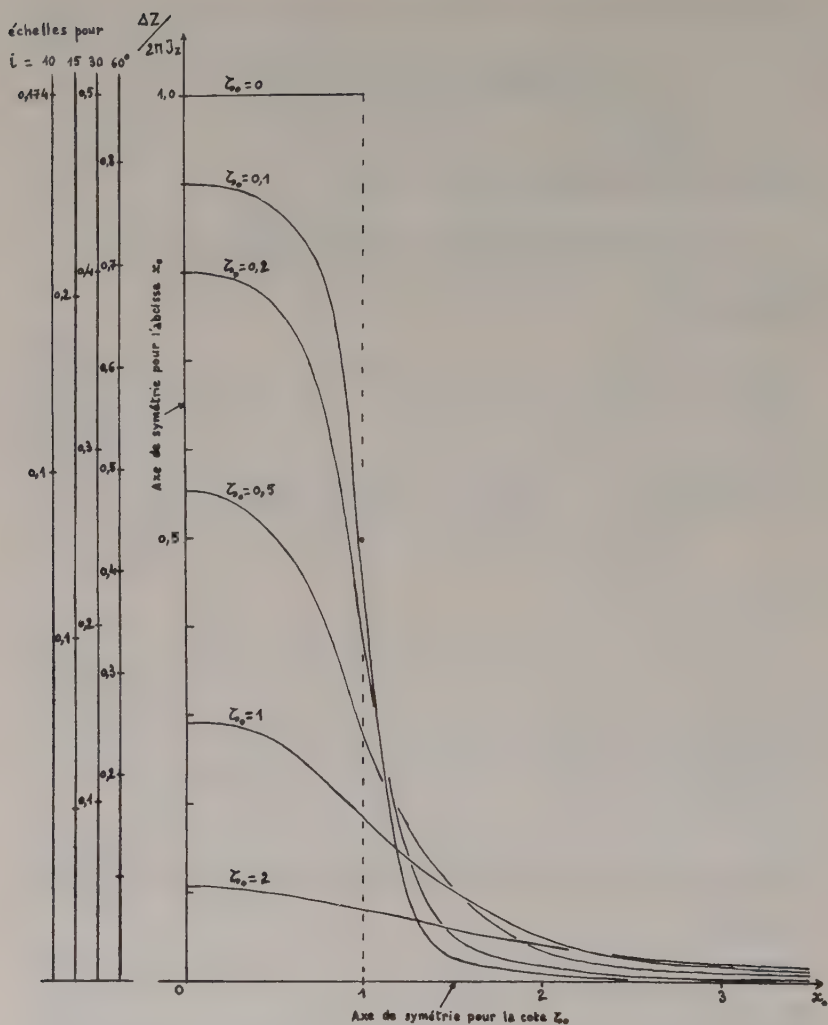


FIG. 5. — Composante verticale $(\Delta Z)_z$ du champ d'un cylindre aimanté longitudinalement.

Avec:

$$\cos \alpha_z = \frac{H_{rz}}{H_z} \quad \cos \beta_z = \frac{d}{r} \quad \cos \delta_z = \frac{\xi}{d}$$

$$\sin \alpha_z = \frac{H_{tz}}{H_z} \quad \sin \beta_z = \frac{b}{r}$$

$$\cos (\alpha_z - \beta_z) = \frac{H_{rz}}{H_z} \frac{d}{r} + \frac{H_{tz}}{H_z} \frac{b}{r}$$

nous obtenons:

$$(\Delta X)^z = \frac{\xi}{d} \left(H_{rz} \frac{d}{r} + H_{tz} \frac{b}{r} \right) = \frac{\xi}{du} (H_{rz}d + H_{tz}b)$$

or:

$$H_{rz} = \frac{2 \mathfrak{M}_z}{r^3} \cos \theta_z = \frac{2 \mathfrak{M}_z b}{r^4}$$

$$H_{tz} = \frac{\mathfrak{M}_z}{r^3} \sin \theta_z = \frac{\mathfrak{M}_z d}{r^4}$$

d'où:

$$(\Delta X)^z = \frac{3 \mathfrak{M}_z \xi b}{r^5}.$$

De même:

$$(\Delta Z)^x = H_x \cos \delta_x \cos (\beta_x - \alpha_x)$$

ce qui, en opérant comme précédemment, nous conduit à:

$$(\Delta Z)^x = \frac{b}{rd} (H_{rx}d + \xi H_{tx})$$

et finalement:

$$(\Delta Z)^x = \frac{3 \mathfrak{M}_x \xi b}{r^5}.$$

Nous avons donc bien deux expressions identiques.

Remarquons maintenant que $(\Delta X)^z$, pour une position quelconque du centre C du disque supérieur du cylindre vertical, est la projection sur l'axe des x de sa valeur sur ce même axe

quand C vient dans le plan xOz en restant à la même distance de O .

Il nous suffit donc de calculer $(\Delta Z)^*$ dans le plan xOz contenant le vecteur aimantation $\vec{J}$.

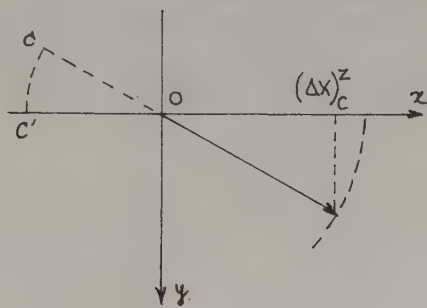


FIG. 6a.

Ce calcul pourrait se faire de la même manière que celle de $(\Delta Z)^*$ mais on obtient plus aisément des formules se prêtant au calcul numérique en considérant le magnétisme fictif (magnétisme de COULOMB) plutôt que le magnétisme vrai (dipôles).

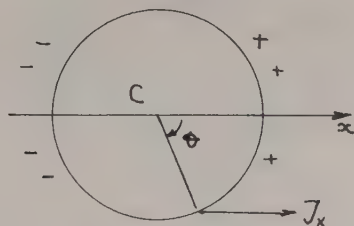


FIG. 6b.

Dans le cas présent le magnétisme fictif couvrira exclusivement la face latérale du cylindre, avec une densité superficielle σ telle que $\sigma = J_x \cos \theta$. Remarquons dès maintenant que cette répartition de magnétisme symétrique par rapport au plan yOz nous donnera une composante verticale nulle sur l'axe du cylindre. De plus en deux positions de C symétriques par rapport au plan xOz nous aurons des champs égaux. Et pour deux positions symétriques de C par rapport au plan yOz les champs

seront égaux et opposés, d'où une valeur nulle du champ pour $x_0 = 0$. Nous pourrions donc limiter notre calcul aux valeurs uniquement positives de x_0 par exemple.

Quant au signe de ζ_0 il sera toujours positif. En effet les composantes verticales des champs en 0 de masses magnétiques symétriques par rapport à $0x$ sont égales et opposées. La partie du cylindre située au-dessus du plan horizontal passant par 0 annule donc l'influence de la même partie située au-dessous de ce plan.

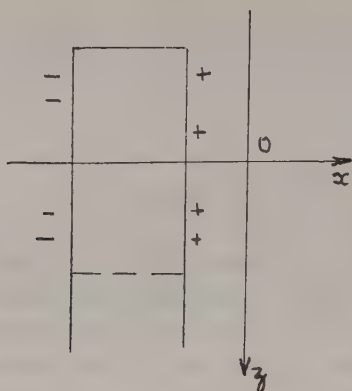


FIG. 6c.

L'élément d'aire (fig. 7) sera un petit rectangle de hauteur de base $d\theta$ (puisque le rayon du cylindre est 1) de coordonnées

$$\begin{aligned} x_0 + \cos \theta \\ \sin \theta \\ \zeta \end{aligned}$$

situé à la distance D de l'axe $0z$ avec $D = \sqrt{x_0^2 + 2x_0 \cos \theta + 1}$.

Le champ en 0, porté par la droite $P0$, est

$$d\mathcal{H} = \frac{\mathcal{I}_x \cos \theta \, d\theta \, d\zeta}{r^2}$$

et la composante verticale dZ (négative, étant dirigée vers le haut) s'écrit:

$$dZ = -d\mathcal{H} \cdot \cos \varphi = -\frac{\mathcal{I}_x \cos \theta \, d\theta \, d\zeta \cos \varphi}{r^2}$$

or:

$$\zeta = \frac{D}{\operatorname{tg} \varphi} \quad d\zeta = -D \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}$$

et:

$$r = \frac{D}{\sin \varphi}$$

d'où:

$$dZ = \frac{\mathcal{J}_x \cos \theta \cos \varphi d\theta d\varphi}{D}.$$

L'intégration en φ de φ_0 (pour $\zeta = \zeta_0$) à 0 (pour $\zeta = +\infty$)

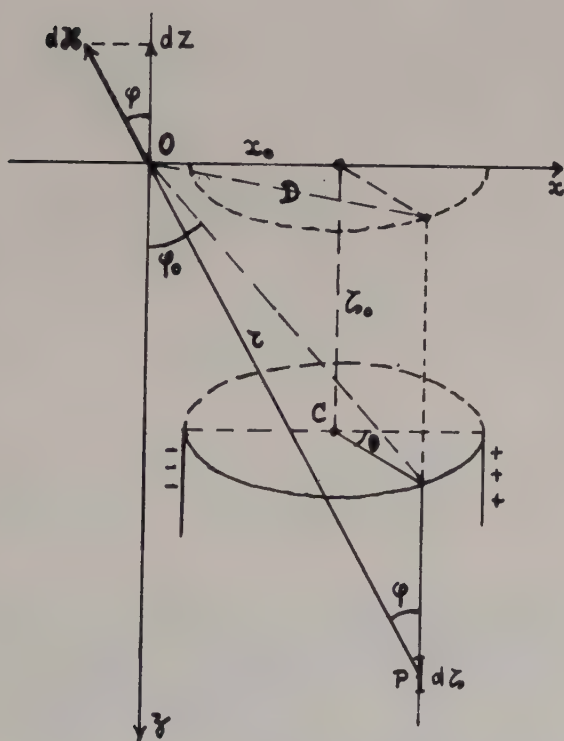


FIG. 7.

nous donne:

$$\int_{\varphi_0}^0 \cos \varphi \, d\varphi = -\sin \varphi_0 = -\frac{D}{\sqrt{D^2 + \xi_0^2}}$$

d'où:

$$dZ = -\frac{\mathcal{J}_x \cos \theta \, d\theta}{\sqrt{x_0^2 + 2x_0 \cos \theta + \xi_0^2 + 1}}$$

soit:

$$(\Delta Z)^x = -\mathcal{J}_x \int_0^{2\Pi} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{x_0^2 + 2x_0 \cos \theta + \xi_0^2 + 1}}$$

CAS PARTICULIERS:

1. L'intégration peut être limitée entre 0 et Π en raison de la symétrie évidente par rapport au plan xOz , d'où:

$$(\Delta Z)^x = -2\mathcal{J}_x \int_0^{\Pi} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{2x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi_0^2 + 1}}$$

Nous allons intégrer graphiquement cette fonction en posant:

$$\alpha = \frac{2x_0}{1 + x_0^2 + \xi_0^2}$$

elle devient:

$$(\Delta Z)^x = -2\mathcal{J}_x \frac{1}{\sqrt{1 + x_0^2 + \xi_0^2}} \int_0^{\Pi} \frac{\cos \theta \, d\theta}{\sqrt{1 + \alpha \cos \theta}}$$

Examinons les limites de α ; elles sont liées à celles de $\cos \theta$ (-1 et $+1$) pour donner une valeur positive ou nulle sous le radical. Nous trouvons que α doit être positif et inférieur ou égal à 1. Ainsi à l'aide de quelques courbes planimétrées correspondant à des valeurs de α de 0 à 1 nous pouvons tracer la courbe représentative de la fonction:

$$F(\alpha) = \int \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}}$$

et en déduire la valeur ΔZ correspondant à un couple de valeurs x_0, ζ_0 donné.

2. Pour $\zeta_0 = 0$ et $x_0 = 1$ l'expression de $(\Delta Z)^*$ devient:

$$-\frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}}$$

égale à l'infini. Autrement dit la courbe représentative présente un point de rebroussement à l'infini quand l'abscisse x_0 est égale au rayon du cylindre.

EXPRESSION DE LA FORMULE ASYMPTOTIQUE:

Nous devons nous placer à une distance x_0 du cylindre assez grande pour que la variation de la distance du point d'observation aux différents points de la circonférence d'un cylindre de hauteur élémentaire $d\zeta$ soit négligeable (fig. 8). Le moment de ce cylindre est alors:

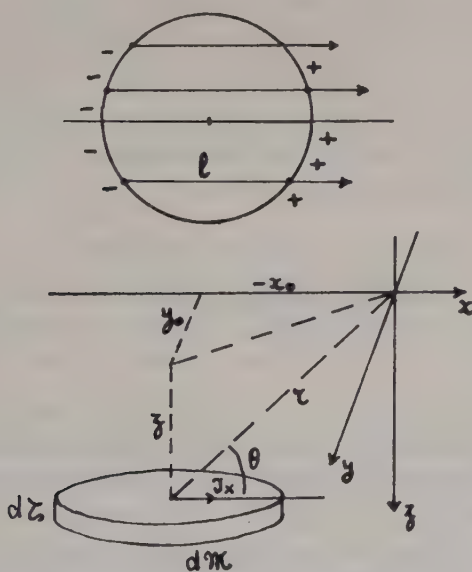


FIG. 8.

$$d\mathfrak{M} = \mathcal{J}_x \Sigma l d\xi = \mathcal{J}_x \Pi R^2 d\xi.$$

Le potentiel créé en 0 est

$$dV = \frac{d\mathfrak{M} \cos \theta}{r^2} = -d\mathfrak{M} \frac{x_0}{r^3}$$

(x_0 étant ici négatif) et la composante verticale s'obtient avec:

$$\begin{aligned} dZ &= -\frac{\partial V}{\partial z} = d\mathfrak{M} x_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{(x_0^2 + z^2)^{3/2}} \right] \\ &= -\frac{3d\mathfrak{M} x_0 z dz}{(x_0^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

soit:

$$Z = -3\Pi\mathcal{J}_x \int_{\xi_0}^{\infty} \frac{x_0 z}{(x_0^2 + z^2)^{5/2}} dz = -\Pi\mathcal{J} \frac{x_0}{(x_0^2 + \xi_0^2)^{3/2}}.$$

TRACE DES COURBES:

L'intégration a été faite pour des cotes ξ_0 allant de 0 à 2. Les courbes correspondantes sont portées sur la *figure 9* utilisant en ordonnées la valeur $(\Delta Z)^*$ en unités $2\Pi\mathcal{J}_x$ avec $\mathcal{J}_x = 1$ (inclinaison 0°). Il est aisé d'en déduire l'échelle pour toute inclinaison. Nous avons porté sur le graphique les échelles correspondant à: $i = 10, 15, 30, 60^\circ$.

A partir de ces courbes nous avons tracé sur la *figure 9a* les isodynames de Z dans des plans horizontaux de différentes cotes en prenant toujours pour unité $2\Pi\mathcal{J}_x$.

c) Valeur totale de la composante verticale

En chaque point cette valeur totale est la somme algébrique des deux composantes étudiées, le rapport des composantes de l'aimantation $\mathcal{J}_z$ et $\mathcal{J}_x$ étant déterminé par l'inclinaison ($\mathcal{J}_z = \mathcal{J}_x \operatorname{tg} i$).

Nous attirons l'attention sur le fait que la variable x_0 utilisée dans le calcul de $(\Delta Z)^z$, exprime la *distance* de l'axe du cylindre au point d'observation.

Le champ terrestre dans la région du volcan Nyiragongo ayant une inclinaison de -30° nous avons tout particulièrement

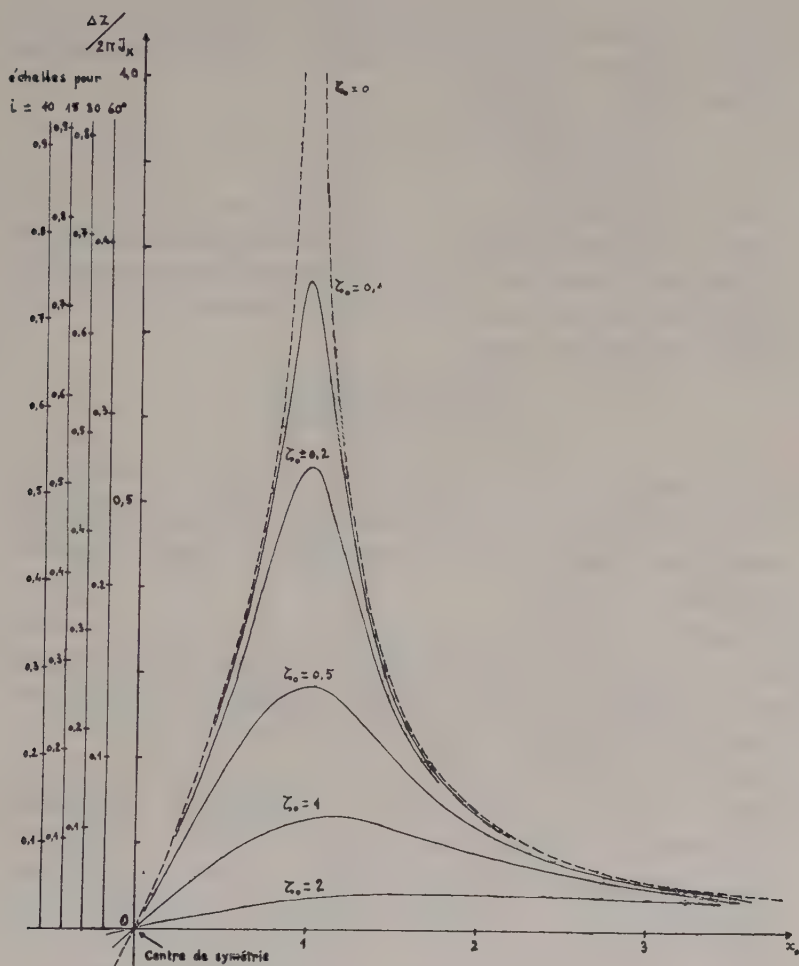


FIG. 9. — Composante verticale $(\Delta Z)^*$ du champ d'un cylindre aimanté transversalement.

calculé les valeurs de la composante verticale pour cette inclinaison, et pour différentes cotes assez rapprochées pour qu'une interpolation visuelle soit possible. Les courbes obtenues dans le plan xOz sont portées sur la *figure 9b*, figure réversible permettant d'obtenir le champ pour une cote ζ_0 positive ou négative, de même que pour une inclinaison de $+30^\circ$. L'échelle

des ordonnées correspond à une intensité d'aimantation $\mathcal{J}$ égale à l'unité ($\mathcal{J}_z = -0,5\mathcal{J}$, $\mathcal{J}_x = 0,866\mathcal{J}$), et celle des abscisses exprime le rapport x_0/R .

2. CALCUL DE LA COMPOSANTE HORIZONTALE DU CHAMP

Nous allons l'obtenir par le calcul de ses projections ΔX et ΔY sur les axes $0x$ et $0y$, $0x$ étant dans le plan du méridien magnétique et $0y$ orienté vers l'Est. Chacune de ces projections étant la somme des influences des composantes $\mathcal{J}_z$ et $\mathcal{J}_x$ de l'aimantation, nous avons:

$$\begin{aligned}(\Delta X) &= (\Delta X)^z + (\Delta X)^x \\ (\Delta Y) &= (\Delta Y)^z + (\Delta Y)^x.\end{aligned}$$

a) Influence $(\Delta X)^z$ de la composante verticale de l'aimantation

Nous avons déjà vu qu'elle était égale, à l'intensité d'aimantation près à $(\Delta Z)^x$. Nous pouvons donc utiliser les courbes des figures 9 et 9a.

Ajoutons seulement que pour une cote ζ_0 négative, la composante ΔX du champ est la même que pour une cote égale mais positive, car les influences des parties du cylindre comprises entre les cotes 0 et $+\zeta_0$, 0 et $-\zeta_0$ étant égales et de signe contraire s'annulent.

D'autre part, le champ dû à la composante verticale de l'aimantation du cylindre étant admis être celui de la face supérieure recouverte de masses magnétiques, de simples considérations montrent que nous avons un plan de symétrie: le plan vertical passant par l'axe des x , et que pour deux positions du cylindre symétriques par rapport au plan vertical passant par l'axe des y nous obtenons des valeurs égales et de signe contraire.

b) Influence $(\Delta X)^x$ de la composante transversale de l'aimantation

Comme pour $(\Delta Z)^x$ nous allons considérer le magnétisme fictif sur la face latérale (fig. 10) et effectuer un calcul similaire.

Nous avons vu que le champ en 0 d'un petit élément $d\zeta$ situé en P à la cote ζ est:

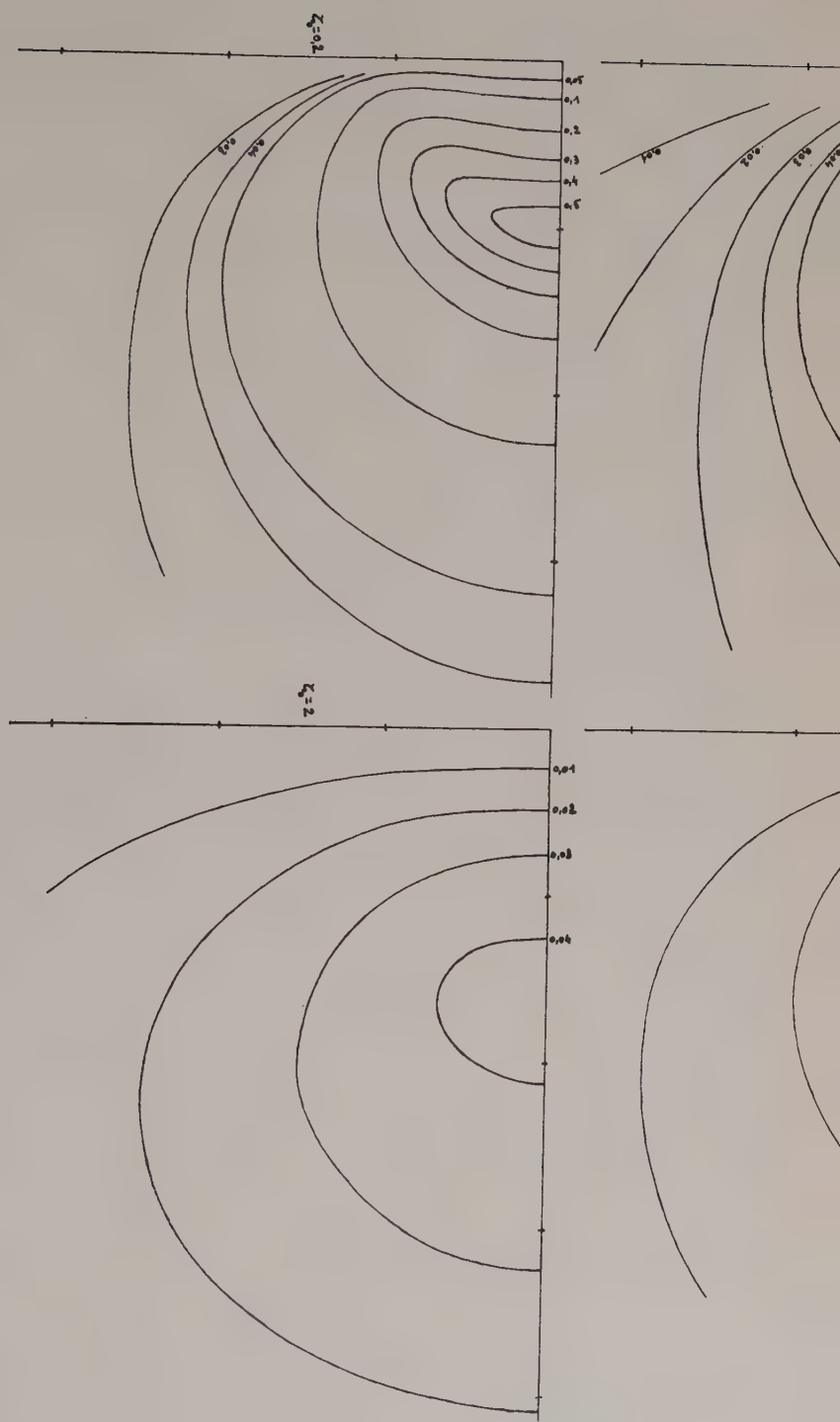
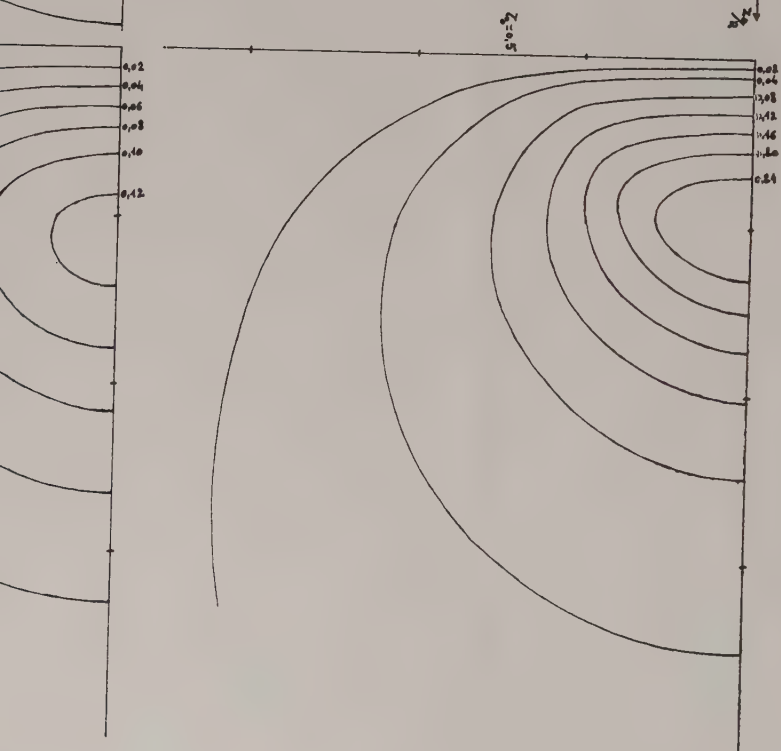
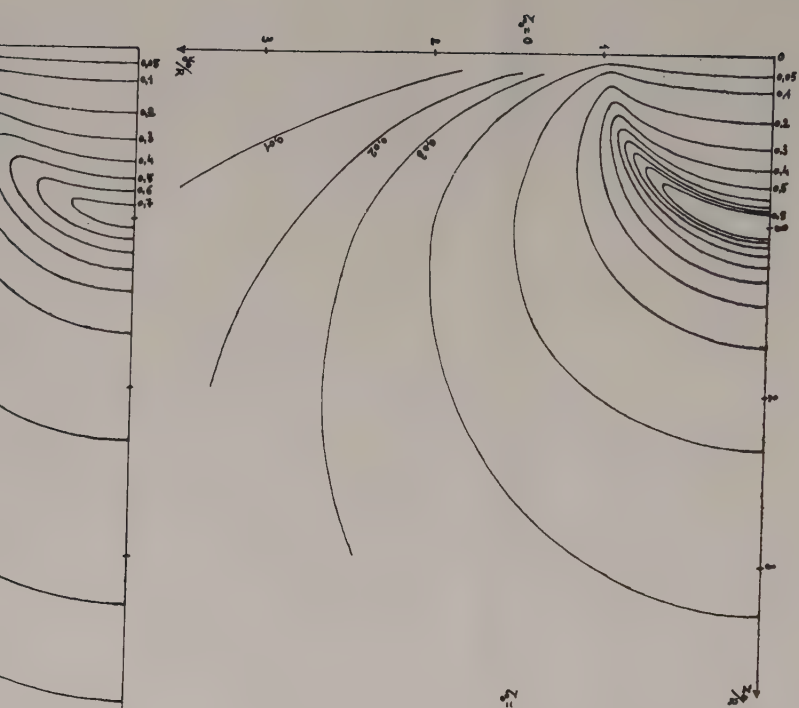


FIG. 9a. —



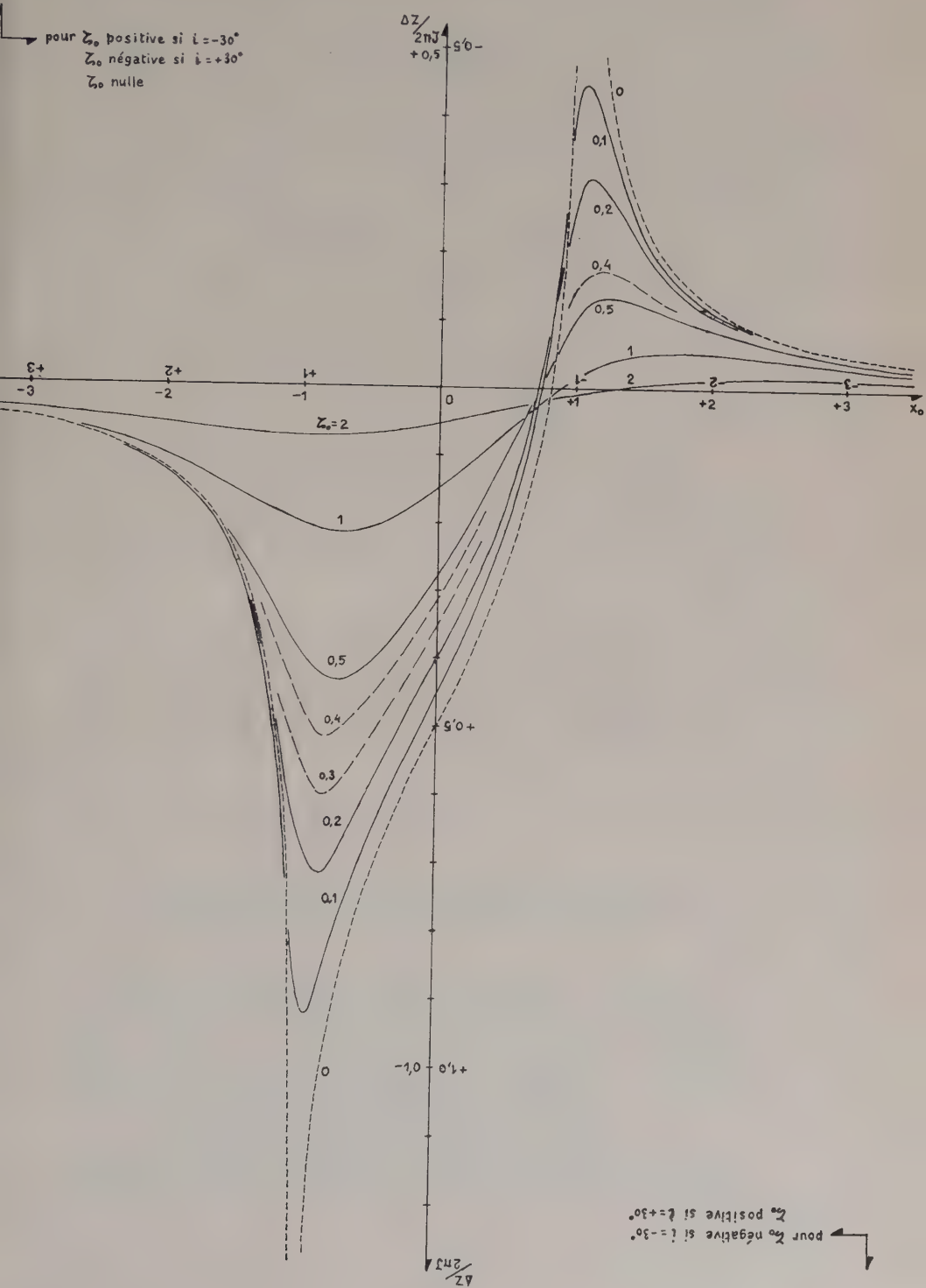


FIG. 9b.

$$d\mathcal{H} = \frac{\mathcal{I}_x \cos \theta d\theta d\xi}{r^2}$$

et la projection dX cherchée s'écrit:

$$dX = -d\mathcal{H} \cos \varphi \cos \delta.$$

Or:

$$\xi = D \operatorname{tg} \varphi \quad d\xi = D \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

de plus:

$$r = \frac{D}{\cos \varphi} \quad \cos \delta = \frac{\xi}{D}$$

d'où:

$$dX = -\mathcal{I}_x \frac{\xi \cos \theta \cos \varphi}{D^2} d\theta d\varphi.$$

L'intégration en φ de φ_0 (pour $\xi = \xi_0$) à $\frac{\Pi}{2}$ (pour $\xi = +\infty$)

donne:

$$\int_{\varphi_0}^{\Pi/2} \cos \varphi d\varphi = 1 - \sin \varphi_0 = 1 - \frac{\xi_0}{\sqrt{D^2 + \xi_0^2}}; \text{ comme } D^2 = \xi^2 + \eta^2,$$

nous obtenons:

$$(\Delta X)^x = -\mathcal{I}_x \int_0^{2\Pi} \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} \left(1 - \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \xi_0^2}} \right) \cos \theta d\theta.$$

Examinons le cas particulier de la *cote* ξ_0 nulle. Nous avons alors:

$$\begin{aligned} \Delta X &= -\mathcal{I}_x \int_0^{2\Pi} \frac{\xi \cos \theta d\theta}{\xi^2 + \eta^2} \\ &= -\frac{\mathcal{I}_x}{2} \int_0^{2\Pi} \frac{\cos \theta (x_0 + \cos \theta) d\theta}{x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta + \frac{x_0^2 + y_0^2 + 1}{2}} \end{aligned}$$

ment transversale, est $\mathcal{J}$. Le champ à l'extérieur est équivalent à celui de deux cylindres respectivement déplacés de $+e$ et $-e$ dans la direction de $\mathcal{J}$ (fig. 11) et ayant pour densités magnétiques de volume:

$$\rho = +\frac{\mathcal{J}}{2e} \quad -\rho = -\frac{\mathcal{J}}{2e}.$$

Nous savons que le champ d'un cylindre de révolution uniformément chargé, avec la densité ρ , est radial, en raison inverse de la distance r à l'axe

$$\frac{2\Pi R^2 \rho}{r}$$

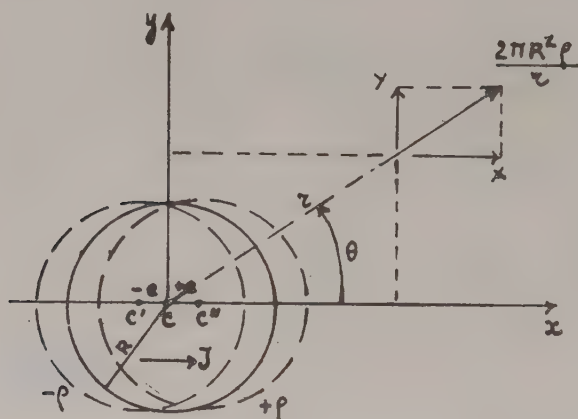


FIG. 11.

et ses composantes sont donc:

$$X = \frac{2\Pi R^2 \rho}{r} \cos \theta = 2\Pi R^2 \rho \frac{x}{r^2} \quad Y = 2\Pi R^2 \rho \frac{y}{r^2}$$

Désignons par X_1 la composante X du champ du cylindre origine, par X_2 celle du cylindre $C''(+\rho)$, par X'_2 celle du cylindre $C'(-\rho)$. Nous avons

$$X_2 = X_1 - \frac{dX_1}{dx} e$$

$$X'_2 = -X_1 - \frac{dX_1}{dx} e.$$

D'où la valeur $\overline{X}$ cherchée:

$$\overline{X} = -2 \frac{dX_1}{dx} e$$

$$\frac{d}{dx} \left(2\Pi R^2 \rho \frac{x}{r^2} \right) = 2\Pi R^2 \rho \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2x^2}{r^4} \right) = 2\Pi R^2 \rho \frac{y^2 - x^2}{r^4}.$$

Or:

$$\frac{y^2 - x^2}{r^4} = -\frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

d'où:

$$\overline{X} = 4\Pi R^2 \rho e \frac{\cos 2\theta}{r^2} = 2\Pi R^2 \mathcal{J}_x \frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

soit pour un demi-cylindre:

$$\overline{X} = \Pi R^2 \mathcal{J}_x \frac{\cos 2\theta}{r^2}$$

ou encore:

$$\overline{X} = \Pi R^2 \mathcal{J}_x \frac{\cos 2\theta}{x^2 + y^2} = \Pi \mathcal{J}_x \frac{\cos 2\theta}{\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2}.$$

Nous avons de la même manière:

$$\overline{Y} = -2 \frac{dY_1}{dx} e$$

soit:

$$\overline{Y} = 4\Pi R^2 \rho e \frac{\sin 2\theta}{r^2} - 2\Pi R^2 \mathcal{J}_x \frac{\sin 2\theta}{r^2}$$

et pour un demi-cylindre:

$$\overline{Y} = \Pi \mathcal{J}_x \frac{\sin 2\theta}{\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2}.$$

Nous avons donc:

$$\frac{\overline{Y}}{\overline{X}} = \operatorname{tg} 2\theta.$$

Considérons maintenant le point P à l'intérieur du cylindre à une distance r de l'axe. La hauteur du cylindre étant indéfinie, l'effet de la couronne extérieure à P est nulle. En appliquant le théorème de Gauss au cylindre de rayon r (fig. 12) nous pouvons écrire:

$$H \cdot 2\pi r = 4\pi \cdot \Pi R^2 \rho$$

d'où:

$$H = 2\Pi\rho r$$

et:

$$X_1 = 2\Pi\rho r \cos\theta = 2\Pi\rho x$$

d'où l'on tire comme précédemment:

$$\bar{X} = -2 \frac{dX_1}{dx} e = -4\Pi\rho e = -2\Pi\mathcal{J}_x.$$

Soit pour un demi-cylindre:

$$\bar{X} = -\Pi\mathcal{J}_x.$$

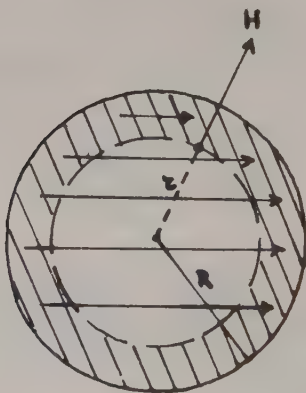


FIG. 12.

Quant à $\bar{Y}$, sa valeur est évidemment nulle, les lignes de force à l'intérieur du cylindre étant parallèles au vecteur aimantation.

Pour les valeurs de ξ_0 différentes de zéro (cotes 0,1 - 0,2 - 0,5 - 1 - 2), nous avons fait l'intégration graphique de l'expres-

sion $(\Delta X)^*$. L'ensemble des courbes obtenues est porté sur la figure 12a, où l'unité employée est $2\pi \mathcal{J}_x$.

Examinons le cas de la cote *négative* et les *symétries*:

Des charges égales et de même signe placées symétriquement par rapport à un plan donnent en un point quelconque de ce plan des champs dont les projections sur le plan sont égales et confondues. Par suite quand la cote ξ_0 est négative, l'influence de la partie du cylindre comprise entre les cotes 0 et ξ_0 est égale à celle de la partie placée symétriquement par rapport au plan. Nous ajouterons donc à la valeur calculée de $+\xi_0$ à l'infini deux fois la valeur trouvée entre les limites 0 et $+\xi_0$.

De plus, tout plan parallèle au plan de symétrie de répartition des charges sur le cylindre devient un plan de symétrie pour les positions du cylindre donnant en 0 des composantes égales. C'est ici le cas du plan $x0z$.

Le plan $y0z$ sera aussi un plan de symétrie car la projection ΔX est la même pour les champs dus à des charges égales et de signe contraire placées symétriquement par rapport à ce plan.

Enfin, des charges isolées et de signe contraire placées symétriquement par rapport à un axe donnent des champs dont les projections sur un plan perpendiculaire à l'axe en ce point sont égales et confondues. Il en résulte que les projections sur un axe quelconque du plan, ici $0x$, sont égales, et par suite 0 est un centre de symétrie.

c) Influence $(\Delta Y)^*$ de la composante verticale de l'aimantation

Utilisons la notion de magnétisme fictif qui ramène le champ dû à l'aimantation verticale du cylindre à celui d'un disque recouvert de masses magnétiques.

Nous voyons sur la figure 13:

— que si x_0 et y_0 , abscisse et ordonnée du centre du disque, sont supérieures au rayon, le champ H résultant est, par raison de symétrie, dans un plan vertical passant par $0C$;

— que si y_0 devient inférieure au rayon, le plan contenant H ne passe plus en C mais en un point A d'ordonnée y_A fonction de y_0 .

Or il est évident que pour une position C' symétrique de C par rapport à la bissectrice du 1^{er} quadrant $x0y$, la composante du champ H sera identique à celle $(\Delta X)^z$ pour la position C , et ce, quelle que soit la cote du cylindre.

Nous pouvons déduire la valeur $(\Delta Y)^z$ de celle de $(\Delta X)^z$ par simple symétrie par rapport à la bissectrice. Par suite les profils de $(\Delta X)^z$ pour des azimuts Az choisis deviennent des profils de $(\Delta Y)^z$ pour des azimuts $(\Pi/2 - Az)$.

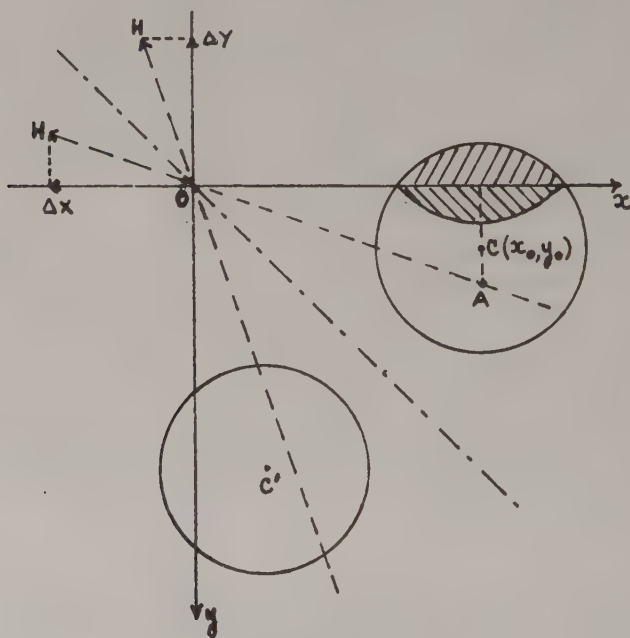
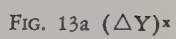


FIG. 13.

d) Influence $(\Delta Y)^x$ de la composante transversale de l'aimantation

Reprenons la figure 10 utilisée pour le calcul de $(\Delta X)^x$. Nous avons:

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\eta}{\xi}.$$

FIG. 13a $(\Delta Y)_x$

Ceci nous permet d'écrire, en partant de l'expression de $(\Delta X)^*$:

$$(\Delta Y)^* = -\mathcal{J}_x \int_0^{2\Pi} \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2} \left(1 - \frac{\xi_0}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \xi^2}} \right) \cos \theta \, d\theta.$$

Pour $\xi_0 = 0$, nous avons déjà trouvé:

$$\text{pour } x > 1 \quad \bar{Y} = \Pi \mathcal{J}_x \frac{\sin 2\theta}{\left(\frac{x_0}{R}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{R}\right)^2}$$

$$\text{pour } x < 1 \quad \bar{Y} = 0.$$

Pour les valeurs de ξ_0 : 0,1 - 0,2 - 0,5 - 1 - 2, nous avons fait l'intégration graphique en utilisant les valeurs calculées pour $(\Delta X)^*$. L'ensemble des courbes est porté sur la *figure 13a* où l'unité employée est $2\Pi \mathcal{J}_x$. Quand la cote ξ_0 est négative, les considérations faites pour $(\Delta X)^*$ sont valables ici.

Pour les mêmes raisons que pour $(\Delta X)^*$ le point 0 est un centre de symétrie. Mais dans le cas de $(\Delta Y)^*$, deux positions du cylindre symétriques par rapport au plan xOz donnent des valeurs égales et opposées, qui deviennent confondues si la symétrie est par rapport au plan yOz .

Ajoutons une remarque sur la symétrie quand $\xi_0 = 0$ et $x_0 > 1$. D'une part, étant donné que $(\Delta X)^*$ est de la forme $A \cos 2\theta$ et $(\Delta Y)^*$ de la forme $A \sin 2\theta$ nous retrouverons la même valeur pour les deux après une rotation de 45° . D'autre part, considérons deux positions C et C' du cylindre, symétriques par rapport à la bissectrice (*fig. 14*)

$$\begin{cases} \theta = \Pi - \beta \\ \theta' = \frac{\Pi}{2} - \beta \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} 2\theta = 2\Pi - 2\beta \\ 2\theta' = \Pi + 2\beta \end{cases}$$

dont la somme donne:

$$2\theta = -2\theta' + 3\Pi$$

qui est de la forme α et $n\Pi - \alpha$ (avec n impair) exprimant la symétrie de $\bar{Y}$ par rapport à la bissectrice.

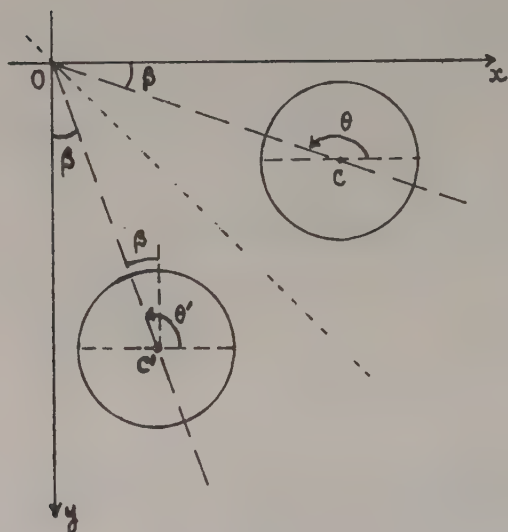


FIG. 14.

3. ANOMALIES PROVOQUÉES PAR LE CYLINDRE

Nous venons d'étudier les composantes verticales et horizontales du champ d'un cylindre. Elles dépendent de l'intensité et de l'inclinaison de l'aimantation, et se résument ainsi

$$\Delta Z = (\Delta Z)^z + (\Delta Z)^x$$

$$\Delta X = (\Delta X)^z + (\Delta X)^x$$

$$\Delta Y = (\Delta Y)^z + (\Delta Y)^x$$

Dans le cas où le vecteur aimantation est dans le plan vertical du champ magnétique terrestre, ces composantes deviennent les « anomalies » d'après la définition de l'anomalie par les géophysiciens.

Si, en un point d'observation où les composantes du champ magnétique normal sont Z_0, H_0, D_0 , nous amenons le cylindre, corps perturbateur, ces composantes sont modifiées. La composante verticale Z_0 devient $Z + \Delta Z$ où ΔZ est l'expression calculée plus haut.

La composante horizontale devient la somme vectorielle de H_0 et de la résultante des deux influences ΔX et ΔY . Nous voyons sur la *figure 15* que la nouvelle composante horizontale $\vec{H}$ effectivement mesurée fait un angle ΔD (anomalie de la

déclinaison) avec le méridien magnétique primitif, et que l'anomalie ΔH de la composante horizontale vaut: $H' - H_0$.

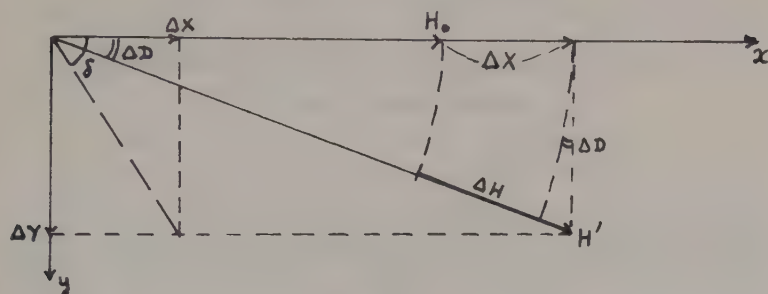


FIG. 15.

Il est donc indispensable, pour obtenir ΔD et ΔH de connaître H_0 .

Nous avons:

$$\Delta H = \sqrt{(\Delta X + H_0)^2 + \Delta Y^2} - H_0$$

ce qui se simplifie pour de petites valeurs de ΔD (jusqu'à une dizaine de degrés environ) en confondant le sinus et la tangente:

$$\Delta H = H' - H_0 = \Delta X + \Delta Y \sin \Delta D$$

devient:

$$\Delta H = \Delta X + \Delta Y \operatorname{tg} \Delta D = \Delta X + \frac{\Delta Y^2}{H_0 + \Delta X}.$$

Si on pose:

$$H_0 = p \cdot \Delta X$$

$$\Delta H = \Delta X + \frac{\Delta Y^2}{(p+1)\Delta X} = \Delta X \left[1 + \frac{1}{p+1} \left(\frac{\Delta Y}{\Delta X} \right)^2 \right]$$

et:

$$\operatorname{tg} \Delta D = \frac{1}{p+1} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

ou encore:

$$\operatorname{tg} \Delta D = \frac{1}{p+1} \operatorname{tg} \delta.$$

Et la nouvelle valeur i' de l'inclinaison s'obtiendra à partir de la relation:

$$\operatorname{tg} i' = \frac{Z + \Delta Z}{H_0 + \Delta H}.$$

CHAPITRE II

Champ magnétique d'un cône de révolution aimanté uniformément

Nous avons été amené à entreprendre cette étude afin de pouvoir analyser les anomalies de Z obtenues sur le flanc du volcan Nyiragongo. Cette étude constitue une application directe des calculs précédents du champ magnétique d'un cylindre. Antérieurement T. RIKITAKE ([9] 1951), pour le volcan Mihara, a calculé ce champ d'une toute autre manière et donné des formules dont les applications numériques exigent des calculs longs et pénibles.

Ici, nous nous intéresserons uniquement à la composante verticale dont les variations dans le cas des volcans sont généralement les plus importantes, et seulement dans le plan méridien contenant le vecteur aimantation.

1. EXPRESSION GÉNÉRALE

Soit un cône aimanté uniformément dont le sommet O est pris pour origine des coordonnées (*fig. 16*). Il est défini par sa base de rayon R_2 situé à la cote z_2 . Nous voulons calculer son champ $\vec{\mathcal{H}}$ en un point M_0 à la distance $\overline{OM}_0 = r_0$ de O .

Considérons une couche d'épaisseur dz de cote z . Par raison d'homothétie elle engendre en M_0 le même champ $\overrightarrow{d\mathcal{H}}$ qu'une couche $\frac{z_2}{z} dz$, de cote z_2 , engendrerait en M' , point de OM situé à une distance $OM' = r = \frac{z_2}{z} r_0$ du sommet O .

Soit donc $\vec{h}_2(r)$ le champ créé en M' par une couche d'épaisseur unité, de cote z_2 . Nous avons:

$$\vec{d\mathcal{H}} = \vec{h}_2(r) \cdot \frac{z_2}{z} dz$$

et le champ d'une portion du cône comprise entre deux cotes z_1 et z_2 s'écrit:

$$\vec{\mathcal{H}} = \int_{z_1}^{z_2} d\vec{\mathcal{H}} = z_2 \int_{z_1}^{z_2} \vec{h}_2(r) \frac{dz}{z}.$$

Intégrons en r plutôt qu'en z :

$$\vec{\mathcal{H}} = z_2 \int_{r_2}^{r_1} \vec{h}_2(r) \frac{dr}{r} = z_2 \int_{r_2}^{r_1} \vec{h}_2(r) d(\text{Log } r).$$

La quantité $\vec{h}_2$ n'est autre que le champ de l'élément différentiel utilisé pour les calculs relatifs au cylindre. Si ces derniers ne sont pas directement utilisables parce que notre première intégration a été faite en z nous avons néanmoins la possibilité d'utiliser les courbes $(\Delta Z)^z$ et $(\Delta Z)^x$ du champ d'un cylindre. En effet nous pouvons tracer à partir de ces courbes celles de la variation de Z en fonction de la cote ζ pour différentes abscisses, et la pente de la tangente en chaque point de ces nouvelles courbes exprime bien la valeur $d\vec{\mathcal{H}}/dz$ cherchée. Toutefois le tracé de la tangente étant délicat nous n'utiliserons ce procédé que pour interpoler entre des valeurs calculées du champ d'un disque mince.

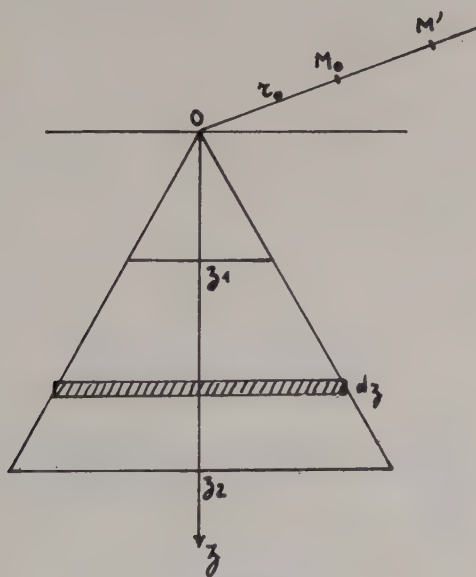


FIG. 16.

Par ailleurs faisons une remarque concernant le domaine d'intégration fonction du rapport z_2/z_1 , quand ce rapport devient très grand. Le tronc de cône tend alors vers un cône dont le sommet correspond à r infini. Le champ $\vec{b}_2$ étant en raison inverse de r^3 , l'intégrale en $\frac{dr}{r^3}$ converge extraordinairement vite. Il en résulte que l'influence du sommet du cône peut être négligée.

2. COMPOSANTE VERTICALE DU CHAMP D'UNE PLAQUE MINCE CIRCULAIRE

Le vecteur aimantation de la plaque pouvant être décomposé en une aimantation verticale $\mathcal{J}_z$ et une aimantation transversale $\mathcal{J}_x$ nous allons étudier séparément la composante verticale du champ de chacune d'elles.

a) Influence $(\Delta Z)^2$ de l'aimantation verticale

Le champ de la plaque est de révolution autour de son axe. Par suite nous pouvons choisir des axes de coordonnées tels que le centre de la plaque (*fig. 17*) soit dans le plan xOz , ses coordonnées étant alors x_0 et ζ .

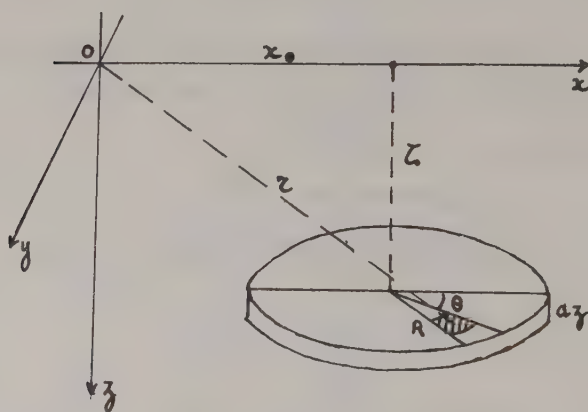


FIG. 17.

Nous pouvons poser $dz = 1$ étant admis que l'unité est infiniment petite, et nous allons calculer le coefficient de proportionnalité à dz .

Soient ξ, η, ζ , les coordonnées d'un petit élément dS de moment $d\mathfrak{M}_z = \mathcal{J}_z dS$. Le potentiel créé en un point M de coordonnées x, y, z , à une distance r est:

$$dV = \mathcal{J}_z \frac{1}{r} dS \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$$

et pour toute la surface:

$$V = \mathcal{J}_z \iint_{(S)} \frac{1}{r} dS$$

la composante verticale de l'anomalie:

$$\Delta Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

s'écrit alors:

$$\Delta Z = -\mathcal{J}_z \iint_{(S)} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) dS.$$

Nous pouvons particulariser tout de suite en amenant le point M à l'origine des coordonnées où $x = y = z = 0$, ce qui nous permet d'écrire

$$\Delta Z = \mathcal{J}_z \iint_{(S)} \frac{\partial^2 1}{\partial \xi^2} dS \quad \text{où} \quad dS = R dR d\theta.$$

En prenant le rayon égal à 1, il vient:

$$\Delta Z = \mathcal{J}_z \int_0^{2\Pi} d\theta \int_0^1 \left[\frac{R}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{3/2}} + \frac{3\xi^2 R}{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{5/2}} \right] dR$$

où

$$\begin{aligned} \xi &= x_0 + R \cos \theta \\ \eta &= R \sin \theta \end{aligned}$$

et

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2 + 2R x_0 \cos \theta + x_0^2$$

La valeur de l'intégrale

$$I_1 = \int_0^1 \frac{R dR}{(R^2 + 2R x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi^2)^{3/2}}$$

a déjà été calculée dans l'étude $(\Delta Z)^2$ du cylindre. Nous avons trouvé:

$$I_1 = \frac{-1}{x_0^2 \sin^2 \theta + \xi^2} \left[- (x_0^2 + \xi^2)^{1/2} + \frac{x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi^2}{(2x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi^2 + 1)^{1/2}} \right]$$

Cherchons la valeur de

$$I_2 = \int_0^1 \frac{R dR}{(R^2 + 2R x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi^2)^{5/2}}$$

Elle est de la forme:

$$\int \frac{x dx}{X^2 \sqrt{X}} \quad (X = ax^2 + bx + c)$$

dont l'intégrale générale est:

$$-\frac{1}{3aX^{3/2}} \left[1 + \frac{b(4ax + 2b)}{2(4ac - b^2)^2} (4ac - b^2 + 8aX) \right]$$

d'où:

$$I_2 = \left\{ -\frac{1}{3X^{3/2}} \left[1 + \frac{x_0 \cos \theta (R + x_0 \cos \theta)}{(x_0^2 \sin^2 \theta + \xi^2)^2} (x_0^2 \sin^2 \theta + \xi^2 + 2X) \right] \right\}_0^1$$

soit:

$$I_2 = \frac{-1}{3(2x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi^2 + 1)^{3/2}} \left[1 + \frac{[x_0^2 (\sin^2 \theta + 2) + 4x_0 \cos \theta + 3\xi^2 + 2](x_0^2 \cos^2 \theta + x_0 \cos \theta)}{(x_0^2 \sin^2 \theta + \xi^2)^2} \right]$$

$$+ \frac{1}{3(x_0^2 + \xi^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{x_0^2 \cos^2 \theta [x_0^2 (\sin^2 \theta + 2) + 3\xi^2]}{(x_0^2 \sin^2 \theta + \xi^2)^2} \right]$$

d'où:

$$\begin{aligned} (\Delta Z)^z = 2\mathcal{J}_z \int_0^\pi d\theta & \left[\left\{ \frac{1}{x_0^2 \sin^2 \theta + \xi^2} \left[-(x_0^2 + \xi^2)^{1/2} + \frac{x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi^2}{(2x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi^2 + 1)^{1/2}} \right] \right\} \right. \\ & + \xi^2 \left\{ \frac{-1}{(2x_0 \cos \theta + x_0^2 + \xi^2 + 1)^{3/2}} \left[1 + \right. \right. \\ & \left. \frac{x_0 \cos \theta (x_0 \cos \theta + 1) (x_0^2 \sin^2 \theta + 4x_0 \cos \theta + 2x_0^2 + 3\xi^2 + 2)}{(x_0^2 \sin^2 \theta + \xi^2)^2} \right] \\ & \left. \left. + \frac{1}{(x_0^2 + \xi^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{x_0^2 \cos^2 \theta (x_0^2 \sin^2 \theta + 2x_0^2 + 3\xi^2)}{(x_0^2 \sin^2 \theta + \xi^2)^2} \right] \right\} \right] \end{aligned}$$

L'intégration graphique de cette expression et quelques valeurs déduites des courbes de champ relatives au cylindre nous ont permis de tracer les courbes de la *figure 18* avec les coordonnées réduites ξ/R et x_0/R . Ces courbes sont valables quel que soit le signe de ξ .

REMARQUES

1. Le champ d'un disque aimanté suivant son axe est identique à celui d'un fil circulaire parcouru par un courant. Le même calcul effectué pour ce fil en appliquant la loi de BIOT et SAVART nous a conduit à une expression sensiblement aussi longue.

Remarquons à titre de vérification que sur l'axe du disque le champ obtenu en faisant $x_0 = 0$ dans l'expression ci-dessus:

$$(\Delta Z)^z = 2\mathcal{J}_z \frac{1}{(1 + \xi^2)^{3/2}} \int_0^\pi d\theta = 2\pi\mathcal{J}_z \frac{1}{(1 + \xi^2)^{3/2}}$$

est celui bien connu d'une spire, de rayon $R = 1$, sur son axe.

2. Le calcul ainsi conduit suppose que nous avons une distribution de dipôles sur une surface géométrique sans épaisseur. Dans l'application que nous en ferons il s'agira en fait d'un feuillet d'épaisseur infiniment petite et non pas nulle.

Quand nous passons de l'extérieur à l'intérieur du feuillet le champ subit une discontinuité mais pas l'induction. Le calcul que nous avons fait ne représente pas correctement le champ à l'intérieur du feuillet, mais il est partout correct à l'intérieur comme à l'extérieur s'il s'agit de l'induction.

À l'extérieur du cône la composante verticale de l'induction est identique à la composante verticale du champ mais à l'intérieur du cône il convient d'ajouter à cette dernière $4\pi\mathcal{J}_z$.

EXAMEN DE L'EXPRESSION DE $(\Delta Z)^*$ QUAND $\xi = 0$

Nous n'étudierons pas le cas où $\xi = 0$ et $x < 1$ qui ne présente pas d'intérêt pour nous et pour lequel la formule donne lieu à des indéterminations compliquées du fait qu'il y a des éléments de surface du disque pour lesquels $r = 0$. Disons seulement qu'il semble que l'on pourrait étudier assez simplement ce cas avec l'intégrale curviligne de BIOT et SAVART. Ou encore nous remarquerons que le champ d'un disque illimité *troué*, d'aimantation $-\mathcal{J}_z$, est égal à celui cherché car le disque $\mathcal{J}_z$ étudié peut être reconstitué en superposant une plaque illimitée $\mathcal{J}_z$ dont le champ est identiquement nul.

Voyons le cas $\xi = 0$, $x > 1$.

Notre expression s'écrit:

$$\Delta Z = 2\mathcal{J}_z \int_0^\pi \frac{d\theta}{x_0^2 \sin^2 \theta} \left[-x_0 + \frac{x_0 \cos \theta + x_0^2}{(2x_0 \cos \theta + x_0^2 + 1)^{1/2}} \right]$$

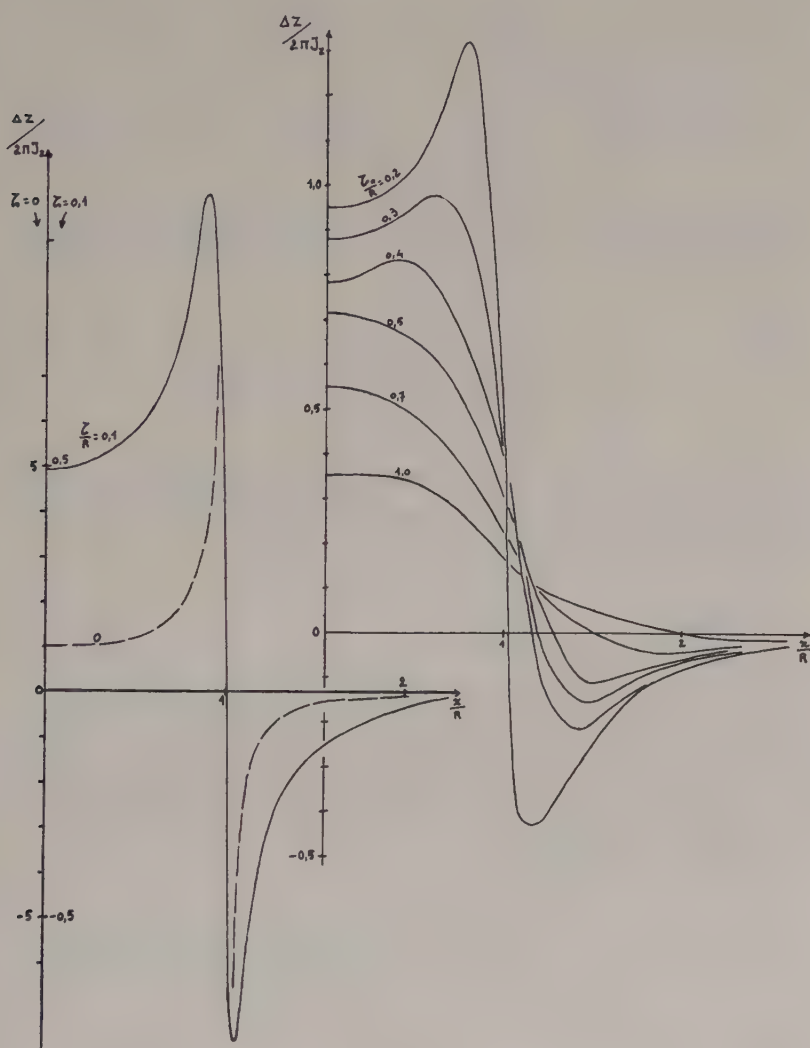


FIG. 18. — Composante du champ d'une plaque mince circulaire (aimantation verticale).

ou:

$$\Delta Z = -\frac{2\mathcal{J}_z}{x_0} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \left[1 - \frac{x_0 + \cos \theta}{(x_0^2 + 2x_0 \cos \theta + 1)^{1/2}} \right]$$

1° *Cas de x_0 très grand*

Nous pouvons écrire:

$$\frac{x_0 + \cos \theta}{(x_0^2 + 2x_0 \cos \theta + 1)^{1/2}} - \left(1 + \frac{\cos \theta}{x_0}\right) \left(1 + \frac{2 \cos \theta}{x_0} + \frac{1}{x_0^2}\right)^{1/2}$$

$$= \left(1 + \frac{\cos \theta}{x_0}\right) \left(1 - \frac{\cos \theta}{x_0} - \frac{1}{2x_0^2} + \frac{3 \cos^2 \theta}{2x_0^2} + \dots\right) = 1 - \frac{\sin^2 \theta}{2x_0^2}$$

d'où:

$$\Delta Z = -\frac{2\mathcal{J}_z}{x_0} \int_0^\Pi \frac{d\theta}{2x_0^2} = -\frac{\Pi \mathcal{J}_z}{x_0^3}.$$

Soit la composante verticale du champ d'un dipôle de moment $\Pi \mathcal{J}_z$ en 2^{me} position de GAUSS. Ce résultat constitue une vérification supplémentaire de notre formule.

2° *Convergence de l'intégrale ΔZ*

Comme $\sin \theta$ s'annule pour $\theta = 0$ et $\theta = \Pi$, apparemment la fonction sous le signe somme devient infinie de sorte que l'intégrale semble diverger.

Examinons ce cas de plus près:

a) Pour θ voisin de 0,

$$\sin^2 \theta = \theta^2 \quad \cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

$$x_0^2 + 2x_0 \cos \theta + 1 = (x_0 + 1)^2 - x_0 \theta^2$$

d'où:

$$1 - \frac{x_0 + \cos \theta}{(x_0^2 + 2x_0 \cos \theta + 1)^{1/2}}$$

$$= 1 - \frac{x_0 + 1 - \frac{\theta^2}{2}}{[(x_0 + 1)^2 - x_0 \theta^2]^{1/2}} = 1 - \frac{1 - \frac{\theta^2}{2(x_0 + 1)}}{\left[1 - \frac{x_0 \theta^2}{(x_0 + 1)^2}\right]^{1/2}}$$

Développons le terme sous le radical:

$$\left[1 - \frac{x_0 \theta^2}{(x_0 + 1)^2} \right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{x \theta^2}{(x_0 + 1)^2}$$

il vient:

$$1 - \frac{x_0 + \cos \theta}{(x_0^2 + 2x_0 \cos \theta + 1)^{\frac{1}{2}}} = 1 - \frac{1 - \frac{\theta^2}{2(x_0 + 1)}}{1 - \frac{x_0 \theta^2}{2(x_0 + 1)^2}} = \frac{\theta^2}{2(x_0 + 1)^2 - x_0 \theta^2}$$

d'où:

$$\Delta Z = -\frac{2\mathcal{J}_z}{x_0} \int_0^\pi \frac{d\theta}{\theta^2} \frac{\theta^2}{2(x_0 + 1)^2 - x_0 \theta^2}$$

qui devient au voisinage de $\theta = 0$:

$$\Delta Z = -\frac{\mathcal{J}_z}{x_0(x_0 + 1)^2} \int_0^\theta d\theta.$$

b) Pour θ voisin de Π :

Nous posons $\theta = \Pi + \varphi$, alors:

$$\frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \left[1 - \frac{x_0 + \cos \theta}{(x_0^2 + 2x_0 \cos \theta + 1)^{\frac{1}{2}}} \right] = \left[1 - \frac{x_0 - \cos \varphi}{(x_0^2 - 2x_0 \cos \varphi + 1)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

En développant en série $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$ et ne gardant que les termes en φ de degré inférieur ou égal à 2, nous obtenons

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} \quad \sin^2 \varphi = \varphi^2$$

d'où:

$$\left[1 - \frac{x_0 - \cos \varphi}{(x_0^2 - 2x_0 \cos \varphi + 1)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{d\varphi}{\sin^2 \varphi} = \left[1 - \frac{x_0 + \frac{\varphi^2}{2} - 1}{[(x_0 - 1)^2 + x_0 \varphi^2]^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{d\varphi}{\varphi^2} = \frac{d\varphi}{2(x_0 - 1)^2}$$

et:

$$\Delta Z = -\frac{\mathcal{J}_z}{x_0(x_0-1)^2} \int_0^\varphi d\varphi.$$

Cette intégrale devient infinie si x_0 tend vers 1 par valeurs supérieures à 1.

3° Pour $x_0 = 1$

Il y a discontinuité, le champ passe de $+\infty$ à $-\infty$ quand nous franchissons la valeur 1. Pour cette valeur de x_0 on obtient:

$$\Delta Z = -2\mathcal{J}_z \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \left[1 - \frac{(1 + \cos \theta)^{1/2}}{\sqrt{2}} \right]$$

or

$$(1 + \cos \theta)^{1/2} = \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

d'où

$$\Delta Z = -2\mathcal{J}_z \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sin^2 \theta} \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right).$$

C'est une intégrale convergente, mais la valeur même de cette intégrale convergente n'a pas de signification physique concrète puisqu'il s'agit d'un point de discontinuité.

Quand nous examinerons le cas d'un cône nous serons amenés à le décomposer en tranches parallèles d'épaisseur infiniment petites dont nous ferons la somme des effets dans une intégration.

Si le point de mesure est placé sur la surface même du cône la fonction à intégrer deviendra donc infinie en raison de ce que nous venons de voir. Il faut donc étudier en détail la façon dont la fonction se comporte. Il ne suffit même plus de considérer qu'on a affaire à un cylindre mais il est essentiel de tenir compte de l'effet de cône.

Soit donc une tranche de cône (*fig. 19*) d'épaisseur $2b$ très petite. Plus tard nous ferons tendre b vers zéro, mais pour

l'instant h est fixe. C'est le point M qui se rapproche *indéfiniment* de la surface du cône en demeurant à l'extérieur. Tout se passe comme si un courant électrique d'intensité $I = 2h\mathcal{J}_z$ circulait sur la surface du cône. La longueur de la génératrice étant $\frac{2h}{\cos\alpha}$, la densité de courant Σ par unité de longueur de la génératrice (densité de la nappe de courant) est:

$$\Sigma = \frac{I}{\frac{2h}{\cos\alpha}} = \mathcal{J}_z \cos\alpha.$$

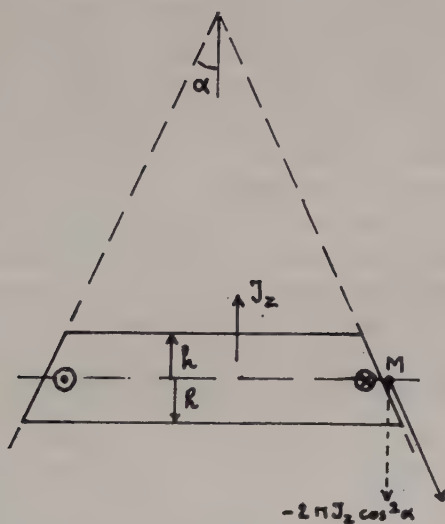


FIG. 19.

Le point M étant supposé *tout contre* le cône, isolons une petite surface dont les dimensions sont de l'ordre de h , autour de M . Le champ provenant des parties extérieures est proportionnel à h . Le champ de la petite surface est dans le méridien, tangent au cône, vers la gauche du bonhomme d'Ampère, égal à $2\Pi\Sigma = 2\Pi\mathcal{J}_z \cos\alpha$ et sa composante verticale est:

$$-2\Pi\mathcal{J}_z \cos^2\alpha$$

($+2\Pi\mathcal{J}_z \cos^2\alpha$ à l'extérieur du cône) indépendante de h .

Le champ unitaire est donc constitué de deux termes, l'un proportionnel à h , l'autre indépendant de h . Divisons par h et faisons tendre h vers zéro, le second de ces termes rend le champ unitaire infini. Nous en déduisons qu'il nous suffit d'isoler une petite tranche du cône de part et d'autre de M et calculer le champ du reste.

Précédemment nous parlions de champ « unitaire », c'est-à-dire rapporté à une tranche d'épaisseur unité. Quand nous divisons le premier terme, qui est proportionnel à h , par h , tout va bien, mais quand nous divisons le second, indépendant de h , par h et que h tend vers zéro, le champ unitaire devient infini, ce qui explique le paradoxe et supprime du même coup toute difficulté dans le calcul de l'intégrale exprimant le champ du cône en ce point situé sur la surface même du cône. En effet, nous devons isoler préalablement le champ « fini » émanant de la petite surface autour de M et la fonction à intégrer ne présentera elle non plus aucune singularité. (Pratiquement, l'épaisseur de la tranche à isoler nous apparaît lors du tracé de la courbe des valeurs de Z le long de la génératrice. Nous avons ainsi trouvé que pour $\alpha = 60^\circ$ nous pouvions supprimer la partie comprise entre les deux valeurs 0,95 et 1,05 de x/R .)

b) Influence $(\Delta Z)^x$ de l'aimantation transversale

Nous avons montré dans l'étude du cylindre que cette influence $(\Delta Z)^x$ était égale à celle $(\Delta X)^z$ de la composante verticale sur l'axe des x , et que cette valeur $(\Delta X)^z$ pouvait être obtenue en un point quelconque d'un plan horizontal à partir de la valeur en un point sur l'axe des x situé à la même distance de l'origine. Il nous suffit donc de calculer $(\Delta Z)^x$ sur l'axe des x uniquement.

Soit un disque d'épaisseur dz (fig. 20) dont la surface latérale est recouverte de masses de valeur $\mathcal{I}_x \cos \theta$. Les coordonnées de son centre sont x et ξ et celles d'un point M de la périphérie:

$$\begin{aligned}\xi &= x + \cos \theta \\ \eta &= \sin \theta\end{aligned}$$

en posant le rayon égal à 1.

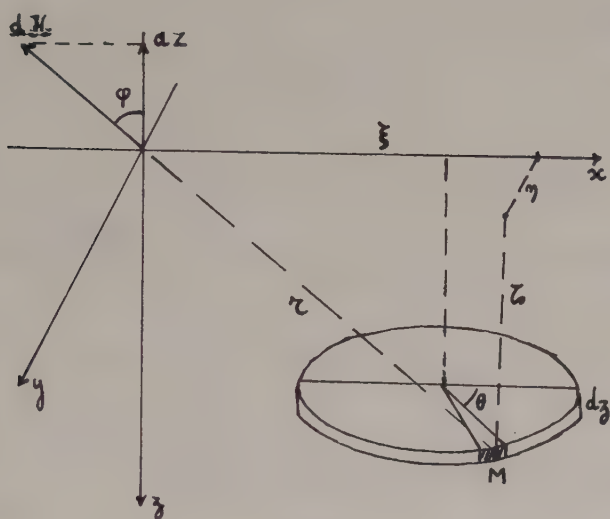


FIG. 20.

Alors

$$d\mathcal{H} = \frac{\mathcal{J}_x \cos \theta d\theta}{r^2} \quad (r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

et:

$$dZ = -\mathcal{J}_x \frac{\cos \varphi \cos \theta d\theta}{r^2}.$$

Avec:

$$\cos \varphi = \frac{\xi}{r}$$

$$dZ = -\mathcal{J}_x \frac{\xi \cos \theta d\theta}{r^3}$$

et:

$$(\Delta Z)^x = -2\mathcal{J}_x \xi \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{[(x + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + \xi^2]^{3/2}}.$$

Transformons le dénominateur:

$$\begin{aligned} [(x + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta + \xi^2]^{3/2} &= (2x \cos \theta + x^2 + \xi^2 + 1)^{3/2} \\ &= (x^2 + \xi^2 + 1)^{3/2} \\ &= \left(\frac{2x}{x^2 + \xi^2 + 1} \cos \theta + 1 \right)^{3/2} \\ &= (x^2 + \xi^2 + 1)^{3/2} (\alpha \cos \theta + 1)^{3/2} \end{aligned}$$

en posant:

$$\alpha = \frac{2x}{x^2 + \xi^2 + 1}$$

d'où:

$$(\Delta Z)^* = -2\mathcal{J}_x \frac{\xi}{(x^2 + \xi^2 + 1)^{3/2}} \int_0^\pi \frac{\cos \theta d\theta}{(\alpha \cos \theta + 1)^{3/2}}.$$

Nous aurons une valeur positive sous le radical en faisant varier α entre 0 et 1.

Le procédé d'intégration graphique sera similaire à celui décrit dans le même cas pour un cylindre.

TRACÉ DES COURBES

Il a été effectué pour différentes valeurs de la cote ξ (*fig. 21*) en partant des valeurs calculées avec l'expression précédente et de valeurs obtenues graphiquement à partir des courbes $(\Delta Z)^*$ d'un cylindre.

Signalons que pour $\xi = 0$, la composante verticale du champ est nulle, elle passe d'un infini à l'autre lorsque ξ change de signe pour $x = 1$. Les valeurs montrent que nous pouvons pratiquement admettre une symétrie jusqu'à un rapport ξ/x de 0,02.

c) Application à un tronç de cône

A partir des courbes des *figures 18 et 21* nous obtenons la valeur de Z en divers points de quelques droites issues du sommet du cône. Il nous suffit alors d'intégrer la courbe obtenue pour chaque droite entre l'abscisse $\text{Log } r$ du point étudié et l'abscisse $z_1/z_2 \text{ Log } r$. Cette intégration est rapide car nous effectuons un déplacement latéral de son domaine.

Nous avons ainsi tracé sur la *figure 22* les courbes d'égale valeur de la composante verticale de l'induction relatives à un cône de demi-angle d'ouverture 60° et de rapport $z_1/z_2 = 0,5$ qui sont les caractéristiques du cône principal du volcan Nyiragongo étudié plus loin. Dans le cas de l'aimantation transver-

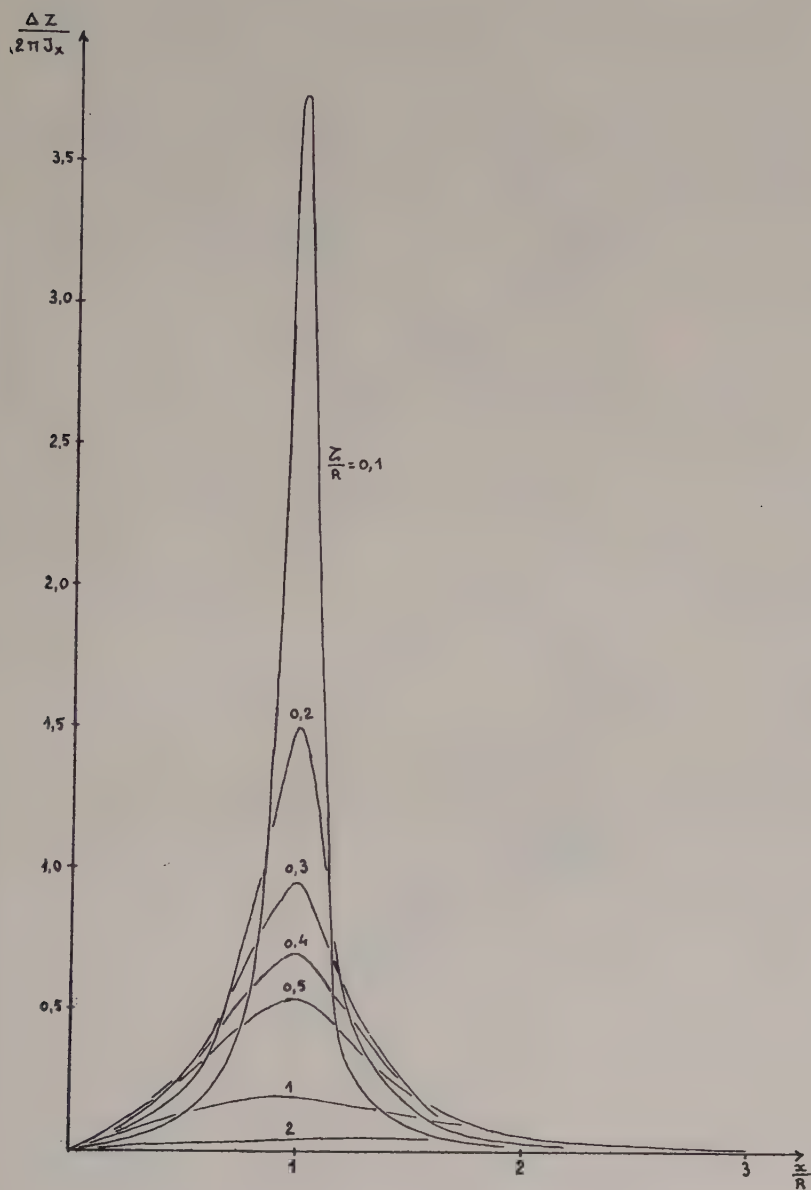


FIG. 21. — Composante verticale du champ d'une plaque mince circulaire (aimantation horizontale).

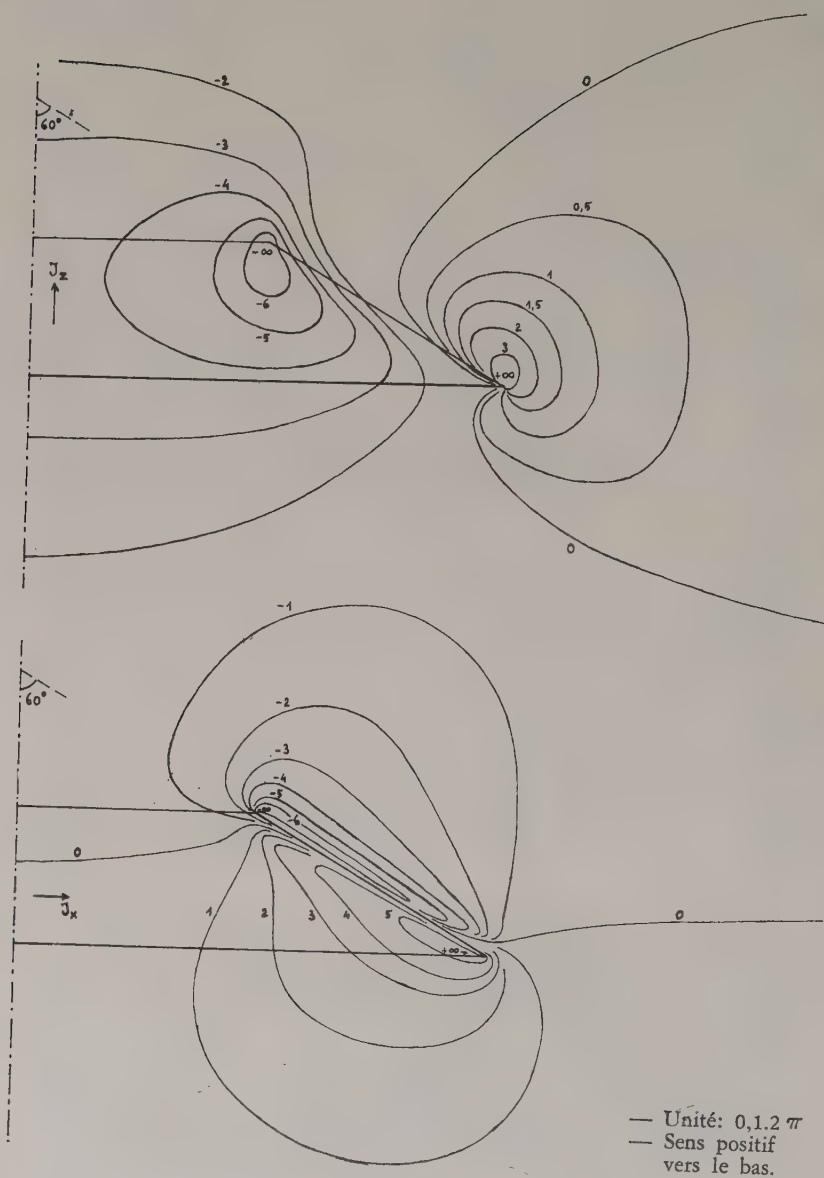


FIG. 22. — Composante verticale de l'induction d'un tronc de cône ($\alpha=60^\circ$, $R_1/R_2=0,5$). (Pour J_x les courbes représentent intégralement la composante verticale du champ).

sale $\mathcal{J}_x$ (figure du bas) ces courbes représentent aussi la composante verticale du champ.

Remarquons que nous pouvons imaginer une représentation des valeurs de Z autre que celle des *figures 18* et *21* en traçant les courbes d'égale valeur de Z en fonction de x/R et de ξ/R . La lecture de Z serait plus rapide mais moins précise car souvent obtenue par interpolation.

DEUXIÈME PARTIE

Application au volcan Nyiragongo

Etude des anomalies de la composante verticale



FIG. 23. — Isonomales de Z en milliers de γ .

1. ANOMALIES OBSERVÉES SUR LE VOLCAN

Nous dirons d'abord quelques mots sur l'ensemble du levé magnétique qui a déjà fait l'objet d'un compte rendu détaillé (G. BONNET [1]). Nous avons utilisé pour la mesure de la composante verticale du champ une balance $B M Z$, et corrigé la variation diurne avec les enregistrements continus de l'Observatoire de Magnétisme Terrestre de Lwiro, situé à une centaine de kilomètres au sud du volcan. A l'intérieur du cratère, un réseau de 367 mesures a permis de couvrir en stations équidistantes de 50 mètres les deux plates-formes et la partie principale du *crag*. A l'extérieur, une centaine de mesures ont été faites en stations d'abord espacées de 50 à 100 mètres sur les flancs nord et sud du volcan, puis davantage sur un cheminement de 45 kilomètres formant grossièrement un vaste cercle tangent au volcan.

Aux stations hors du cratère, une correction de latitude, de 15 γ par km, a été appliquée.

Les anomalies, portées sur la *figure 23*, ont été calculées en retranchant des valeurs mesurées la valeur moyenne 16 000 des valeurs obtenues à l'extérieur du volcan, sans tenir compte des signes « moins » qui caractérisent ces valeurs de la composante verticale du champ terrestre au sud de l'équateur magnétique.

Sur la *figure 24* est tracé le profil des anomalies suivant un axe ayant une déclinaison de 4° vers l'ouest, en donnant au signe de l'anomalie son sens habituel. Cette déclinaison est voisine de la déclinaison actuelle et en accord avec l'ensemble des valeurs obtenues sur le terrain.

A l'intérieur du cratère, ces anomalies sont remarquables dans l'ensemble par leur gradient horizontal élevé allant jusqu'à 1000 γ par mètre et par la régularité des courbes. Le fait de ne pas trouver sur les plates-formes les incohérences que l'on pouvait prévoir sur des « effondrements » (procédé de formation des plates-formes généralement admis) montre une certaine homogénéité dans la nature et l'aimantation du sol.

Faisons une remarque sur les courbes isanomales tracées sur le *crag*. Celui-ci étant formé d'un plateau principal au nord-est

bordé dans la direction Sud-Ouest de plates-formes de plus en plus basses, et ce jusqu'au lac de lave, certaines mesures ont été faites soit au sommet d'une paroi, soit au pied. Il en résulte sur le champ mesuré un effet de relief important qui peut beaucoup modifier l'allure des courbes lorsqu'il n'y a que peu de stations. Aussi avons-nous porté sur la *figure 24* le profil obtenu sur un axe légèrement différent de l'axe Nord-Sud en raison du faible nombre de mesures sur ce dernier axe.

2. CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES À L'INTERPRÉTATION

Si nous avons dès le début de ce travail considéré que les anomalies étaient essentiellement topographiques, l'interprétation consistera à les retrouver en partant d'un assemblage de cylindres présentant au mieux la configuration du cratère notamment.

Si, comme nous pouvons le prévoir, nous sommes amenés à considérer que ces cylindres sont homogènes dans leur aimantation, il n'en reste pas moins que cette aimantation pourra être différente d'un cylindre à l'autre, tant en intensité qu'en direction, qui sont les deux inconnues de notre problème. Et bien que nous disposions, en apparence, de la coupe géologique d'une remarquable netteté que constituent les parois du cratère, il ne nous est pas possible d'y faire beaucoup appel car peu d'échantillons orientés ont pu être prélevés en raison des difficultés d'opération.

Encore ne devons-nous sans doute le regretter qu'en partie, les volcans ayant souvent un champ magnétique bien différent (souvent par excès) de celui que l'on peut calculer à partir des roches superficielles étudiées (J. COULOMB [2]; T. MINAKAMI [4]).

Quant à la genèse du cratère actuel, nous devons considérer, semble-t-il, trois effondrements. Un premier effondrement aurait transformé le sommet initial du cône en une caldère aux dimensions actuelles. Dans cette caldère, des photos prises en 1894 et 1911 montrent deux puits voisins l'un de l'autre. Entre 1911 et 1918, le second effondrement se produit. Nous ne connais-

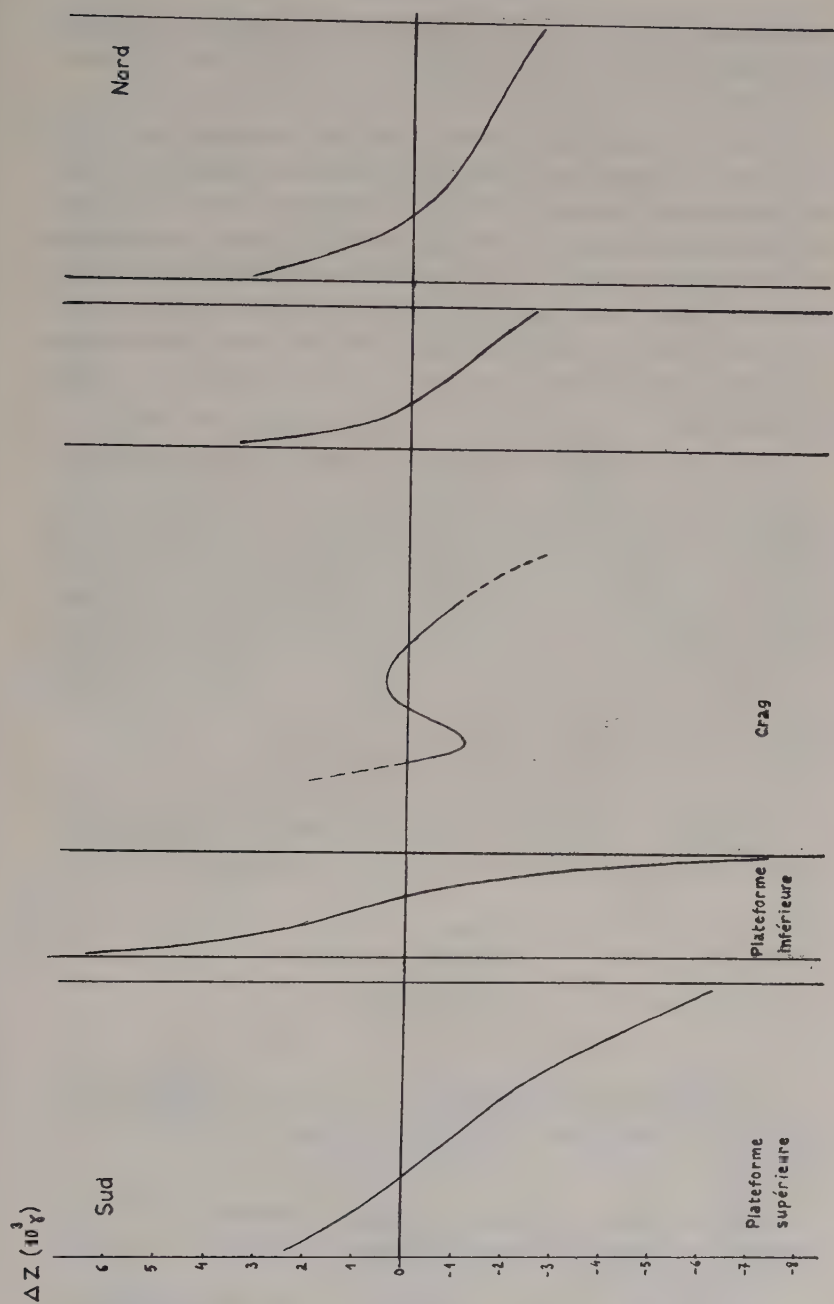


FIG. 24. — Profil suivant le méridien magnétique des anomalies observées dans le cratère (valeur normale: — 16 000 γ).

sons pas la date précise de la formation de la plate-forme inférieure, ni celle du troisième affaissement qui a donné naissance au *crag*.

Il est assez curieux de remarquer que le niveau de la lave en fusion a gardé un niveau relativement constant. En effet, la plate-forme supérieure est bien horizontale et, à la base de la paroi supérieure, on retrouve un placage de lave récente. La partie (sommet du cône ?) affaissée a donc été recouverte de lave liquide et il ne nous est pas possible de dire s'il y a eu éboulement ou cisaillement sans rupture de la stratification originale des différentes couches de laves constituant le sommet du cône.

Contre cette dernière hypothèse, nous ajouterons que si la paroi, entre les deux plates-formes, montre une très nette stratification (couches d'épaisseur moyenne de 1,50 m) nous n'y retrouvons cependant pas certaines zones importantes de tut qui caractérisent la paroi supérieure, et cette stratification même nous fait penser à un remplissage progressif du trou. Nous retiendrons ici qu'il est peu probable que le cylindre A (*fig. 25*) soit identique du point de vue magnétique à la partie B du cratère.

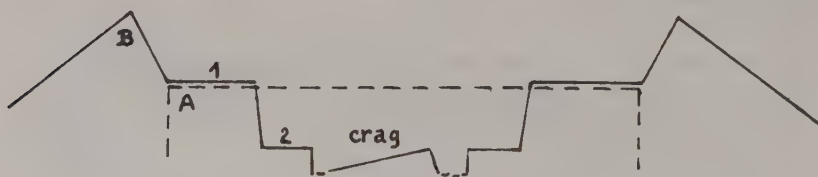


FIG. 25.

Des remarques semblables peuvent être faites pour la formation de la plate-forme 2, mais là nous pouvons affirmer que la lave s'est refroidie dans le champ terrestre actuel.

Quant au *crag*, il semble logique d'admettre qu'il est une partie de cette plate-forme inférieure, affaissée et inclinée.

Le niveau de ce *crag*, par rapport à celui de la plate-forme a varié plusieurs fois durant ces dernières années, suivant les

variations importantes du niveau du lac de lave, ce qui nous amène à penser que ce *crag* doit former grossièrement une lentille devenue convexe par la fusion de sa face inférieure où doivent s'accumuler les gaz (cette hypothèse d'une poche de gaz comprimés créant une augmentation du niveau de la lave liquide à l'air libre pourrait, d'après l'auteur, être la cause des mouvements horizontaux de la lave liquide). Enfin, ajoutons que la plus grande épaisseur visible du *crag* en 1959 était de l'ordre de 50 mètres, le lac de lave étant lui-même à une profondeur du même ordre au-dessous de la plate-forme inférieure.

Voyons maintenant ce que nous savons des caractéristiques magnétiques des roches du volcan Nyiragongo.

Le revêtement superficiel du cône volcanique est principalement constitué de lave à agrégats de néphéline. Presque tous les échantillons prélevés dans la paroi supérieure ou sur la plate-forme correspondante sont des associations diverses de leucite-néphéline-mélilite, avec présence de magnétite dans la plupart d'entre eux.

Quelques échantillons orientés ont été prélevés en août 1959 à la base de la paroi supérieure, dans la lave de deux coulées séparées et dans la couche de tuf intermédiaire, dans un *dyke*, ainsi que dans le placage de lave récente figé sur la paroi lors du refroidissement de la plate-forme supérieure. La déclinaison

	<i>Lave coulées-tuf</i> (17 échantillons)	<i>Lave placage</i> (7 échantillons)
susceptibilité massique	$22 \cdot 10^{-4}$ (répartition presque uniforme des valeurs entre 7 et $30 \cdot 10^{-4}$)	$14 \cdot 10^{-4}$ (valeurs comprises entre 13 et $16 \cdot 10^{-4}$)
inclinaison	0° (répartition presque uniforme entre $+7$ et -7°)	-20° (3/7 des valeurs entre 20 et 22° , et 3/7 entre 12 et 17°)
déclinaison	(3° E)	5° O

et l'inclinaison de l'aimantation de ces roches ainsi que la susceptibilité massique ont été mesurées. Nous ne donnerons pas ici tous les résultats numériques (travaux de L. KOENIGSFELD non publiés) mais citerons seulement les ordres de grandeur et les écarts entre la lave relativement ancienne et la lave plus récente de la plate-forme supérieure.

Pour 4 échantillons (lave placage) l'intensité d'aimantation a été estimée:

$$140.10^{-4}$$

$$150.10^{-4}$$

$$120.10^{-4}$$

$$5,5.10^{-4}$$

Nous remarquons que les valeurs de l'inclinaison et de la déclinaison de la lave du placage sont très proches des valeurs actuelles. Les résultats obtenus sur la lave plus ancienne, tout en ayant plus de dispersion, montrent cependant une différence particulièrement nette pour l'inclinaison.

Sans aller jusqu'à dire que le champ terrestre avait à l'époque de ces coulées une inclinaison nulle à cet endroit du globe, nous en retiendrons cependant la possibilité pour une partie du volcan d'avoir une direction d'aimantation à inclinaison nulle.

Notons aussi que tous les échantillons de lave « ancienne » ont été prélevés au même endroit et ceux du placage, groupés également, à 250 mètres environ du premier site.

Quant aux valeurs de la susceptibilité massique, elles sont sensiblement égales pour les deux types de lave; nous noterons cependant une certaine dispersion des résultats, entre 10 et 30.10^{-4} , les valeurs les plus basses caractérisant d'ailleurs les échantillons prélevés dans le *dyke*.

Enfin, ne disposant pas d'une analyse minéralogique des roches, nous avons fait une analyse pondérale en fonction de la susceptibilité d'un échantillon de lave prélevée en 1959 dans le lac de lave en fusion.

Dans l'appareil utilisé, un séparateur « Frantz Isodynamic », le corps étudié, préalablement réduit en poudre tamisée, passe

dans l'entrefer incliné d'un électro-aimant à champ non uniforme.

Les particules sont ainsi soumises à une force de gravité (fonction de la pente donnée à l'entrefer) et à une force dirigée vers les champs croissants de l'entrefer, cette force étant fonction de la perméabilité magnétique de la particule et de l'intensité du champ dans l'entrefer. On obtient ainsi une séparation progressive des particules en répétant l'opération pour des intensités différentes.

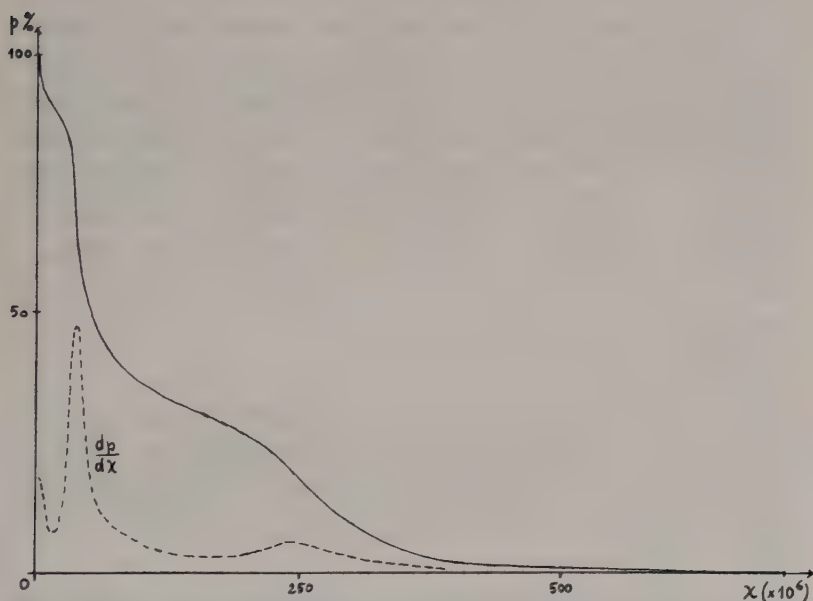


FIG. 26. — Analyse pondérale en fonction de la susceptibilité massique et courbe de répartition en poids.

Un étalonnage préalable de l'appareil permet de relier directement les susceptibilités par unité de masse à l'intensité du courant dans l'électro-aimant.

Nous ajouterons que le champ magnétique créé est de l'ordre de plusieurs milliers d'oersteds.

Nous avons tracé sur la *figure 26*, les résultats de l'analyse de notre échantillon ⁽¹⁾. Le premier tri éliminant les particules

(1) Cette figure donne le pourcentage en poids du corps ayant une susceptibilité supérieure ou égale à une valeur donnée.

ayant une susceptibilité χ supérieure à $400 \cdot 10^{-6}$ mais sans connaître la limite supérieure, nous avons une certaine incertitude à la fin de la courbe.

Nous en avons cependant déduit une valeur de χ moyenne du corps par l'intégration de la courbe, et avons trouvé $2,3 \cdot 10^{-4}$, soit 5 à 10 fois moins environ que les susceptibilités des échantillons vus plus haut. Cette différence peut être due à l'élimination de magnétite pure au premier tri, ou encore à la rapidité du refroidissement de l'échantillon prélevé.

Un autre résultat montré par cette analyse au séparateur est la répartition en poids des constituants ayant une même susceptibilité. Nous l'avons obtenue en dérivant la courbe expérimentale et avons porté le résultat sur la même figure. Nous remarquons un net maximum dans la région χ comprise entre $\chi = 30$ et $\chi = 50 \cdot 10^{-6}$ suivi d'un maximum plus faible pour χ voisin de $250 \cdot 10^{-6}$.

3. INTERPRÉTATION

Notre but est de montrer que les anomalies observées peuvent s'expliquer uniquement par des considérations de relief en donnant à l'aimantation de la roche l'inclinaison voulue compatible avec ce que nous savons ou pouvons raisonnablement supposer.

Nous poserons que l'intensité d'aimantation est la même pour tout le cône volcanique, et l'aimantation uniforme à l'intérieur des volumes étudiés qui seront des cylindres ou cônes de révolution.

De plus, nous négligerons le champ démagnétisant.

Il est évident que toutes ces simplifications admises pourront amener de notables différences entre les anomalies calculées et celles mesurées, un cône volcanique étant généralement constitué de dépôts successifs en des azimuts très variables.

Notons encore que l'assimilation des volumes étudiés à des cylindres ou cônes de révolution peut entraîner des erreurs

bien qu'il ne fasse aucun doute que ce soient les formes géométriques les mieux appropriées à notre cas.

Enfin remarquons que les mesures ayant été faites au voisinage immédiat du corps étudié, il en résulte un gradient horizontal très élevé de l'anomalie près des discontinuités du relief. Nous admettrons d'ailleurs comme négligeable la hauteur de la balance magnétique au-dessus du sol et considérerons que la mesure a été faite sur le corps aimanté.

a) *Anomalies du cône*

Comme le montre le profil de la *figure 27*, nous pouvons sans difficulté assimiler le contenu du volcan à celui de deux troncs de cône superposés *TS* et *TI* dont nous enlevons le cratère assimilé aussi à un tronc de cône *TC*.

Les anomalies connues sur la pente Sud concernant seulement la partie comprise entre A et B, nous ne calculerons pas le champ du tronc de cône inférieur de demi-angle au sommet 75° mais le remplacerons par deux cylindres C_1 et C_2 . Pour les troncs de cône *TS* et *TI* nous utiliserons le calcul déjà fait du champ d'un tronc de cône de demi-angle 60° et de rapport des rayons de base 0,5.

Remarquons que les valeurs observées de l'anomalie (*fig. 28*) forment une courbe très irrégulière et qu'au delà du point D nous ne devons pas tenir compte des valeurs trop influencées par le cône volcanique adjacent. Nous ne disposons donc que d'un petit nombre de données dont nous ne devons conserver que l'allure générale. Comme il ne serait pas justifié, en partant de telles données, de rechercher une interprétation détaillée, nous admettrons une inclinaison unique de l'aimantation pour chacun des deux troncs de cône et pour l'ensemble des cylindres.

Nous avons d'abord considéré une inclinaison uniforme de -30° et ainsi obtenu la courbe (a), courbe qui ne s'améliore guère en changeant l'inclinaison des cylindres de -30° en 0° . Nous avons alors utilisé une inclinaison de -15° pour les troncs de cône et 0° pour les cylindres (courbe b).

Enfin, nous avons tracé la courbe (c) obtenue avec une inclinaison nulle.

Nous pouvons en déduire que l'inclinaison probable de notre volcan, considéré dans son ensemble, est négative et proche de 0° , ce qui constitue déjà un résultat appréciable.

Nous ne devons pas accorder trop d'attention aux différences qui apparaissent près du cratère car, d'une part, au voisinage des extrémités de l'arête d'un tronc de cône la variation de la composante verticale du champ est très rapide, d'autre part le bord du cratère est assez mal défini et peut, en outre, avoir été frappé par la foudre.

b) *Anomalies de la plate-forme supérieure*

En schématisant le cratère du volcan, nous voyons que le champ mesuré sur la plate-forme doit être essentiellement celui d'un cylindre A percé d'un trou C et entouré d'une couronne E , l'ensemble reposant sur un tronc de cône T (fig. 29).

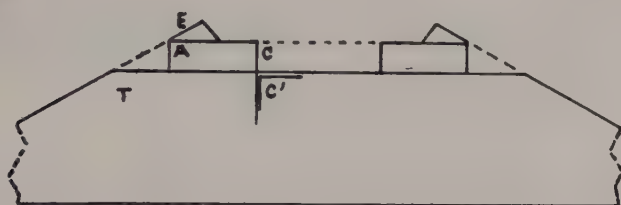


FIG. 29.

Remarquons dès maintenant que l'influence de la cavité C est celle, changée de signe, d'un cylindre identique plein.

Connaissant le champ d'un cylindre de hauteur infinie nous écrirons que l'influence du trou C est le champ du cylindre de hauteur infinie C' diminuée du champ du cylindre de hauteur infinie C .

Pour simplifier l'écriture, convenons pour la suite que, parler du champ d'un cylindre suppose que sa hauteur est infinie.

Examinons rapidement les anomalies de la plate-forme (fig. 23). Au voisinage du trou C , nous voyons que la forme générale des anomalies trouvées sur la plate-forme est bien celle que nous pouvions prévoir $(\Delta Z)^x$ de la composante verti-

cale due à l'aimantation transversale d'un cylindre, $(\Delta Z)^z$ étant nulle en dehors de la base du cylindre pour une cote nulle de cette base.

Nous pouvons aussi remarquer le déplacement vers le nord de la ligne zéro, dû à l'influence des cylindres A et C' .

La symétrie que présentent ces courbes de l'anomalie, par rapport à un axe très voisin du méridien magnétique actuel (déclinaison voisine de 5° Ouest), nous permet de porter notre attention uniquement sur le profil de l'anomalie sur cet axe. Ce dernier correspond à une déclinaison de 4° Ouest, soit sensiblement la valeur que nous pourrions déduire de nos mesures de déclinaison, et il sera valable pour les anomalies de la plateforme inférieure.

Au premier examen de ce profil reproduit sur la *figure 24*, nous constatons que la symétrie ne se manifeste que pour les points situés à la périphérie. Nous pouvons donc dire, à priori, que notre cône volcanique, en entier ou en partie, a une inclinaison différente de zéro car une inclinaison nulle nous donnerait une symétrie complète.

Voyons, maintenant, ce que nous pouvons déduire de la forme de ce profil. Intéressons-nous d'abord à la cavité $(C-C')$ de hauteur $h/R_{C'} = 0,5$.

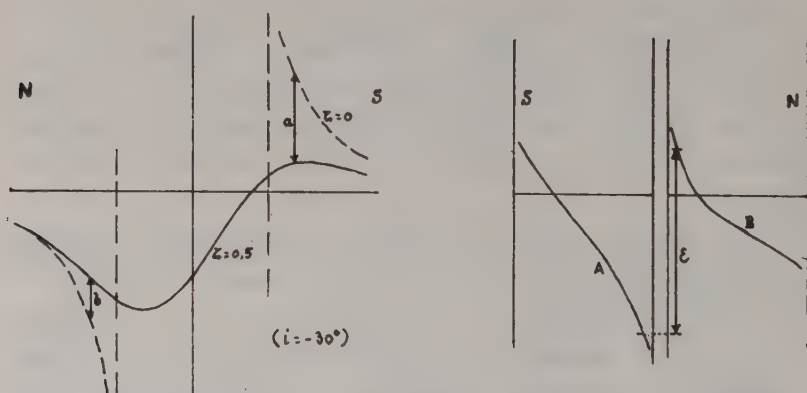


FIG. 30.

L'anomalie mesurée de part et d'autre de son voisinage est, principalement, représentée par l'écart (*fig. 30*) entre les courbes $\zeta = 0$ et $\zeta = 0,5$ de la composante verticale du champ d'un cylindre. Et ce que nous connaissons avec certitude est l'écart ε entre les branches *A* et *B*. Nous pourrions penser à chercher la profondeur de la cavité qui nous donnerait cet écart en supposant une inclinaison de -30° , mais ne connaissant pas l'intensité d'aimantation nous allons le faire en utilisant la variation de ε au voisinage du bord. Cette variation est linéaire, le rapport entre ses valeurs en deux points d'abscisse $1,05 R_0$ et $1,12 R_0$ est 1,65. Un rapide calcul nous a montré qu'à cette valeur correspondait une profondeur trop grande. Nous devons donc faire intervenir l'influence du cylindre *A* (*fig. 31*). En supposant la hauteur de ce cylindre infinie, nous avons trouvé pour différentes valeurs de R_A des profondeurs correspondantes de la cavité ($C-C'$). Retenons seulement ici les deux résultats suivants:

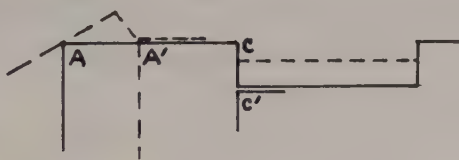


FIG. 31.

Pour le cylindre *A* : $h_{C-C'} = 0,5 R_0$,

Pour le cylindre *A'* : $h_{C-C'} = 0,2 R_0$,

en remarquant que $0,5 R_0$ est la profondeur de la cavité dans le volcan.

Considérons maintenant une autre caractéristique du profil (*fig. 24* ou *33*): l'anomalie est nulle au nord en un point situé à une distance assez grande de la couronne supérieure pour que nous puissions supposer l'influence de cette dernière négligeable. Il faut donc qu'en ce point les influences de la cavité et du cylindre soient égales et opposées. En examinant le cas du cylindre *A*, qui, par la profondeur $0,5 R_0$ semblait le plus proche de la réalité, nous avons trouvé que cette condition d'égalité n'était remplie, pour $i = -30^\circ$, que par un cylindre

pour lequel $b/R = 0,25$, rapport incompatible avec la valeur observée 0,5. Le cylindre A' , avec une inclinaison identique, nous a donné $b/R = 0,15$.

Pour $i = -10^\circ$, nous constatons que le rapport correspondant est bien 0,5. Mais ne devons-nous pas considérer cette inclinaison comme une inclinaison apparente ? D'une part le processus généralement admis de formation des plates-formes : éboulement et glissement, d'autre part la lave couvrant cette plate-forme étant très probablement récente, il nous semble logique d'utiliser, au moins en partie, l'inclinaison actuelle.

Aussi allons-nous envisager le cas d'un disque (*fig. 32*) ayant le diamètre de la plate-forme (cylindre A' déjà vu) et une aimantation dont $i = -30^\circ$, reposant sur un cylindre de même diamètre, pour lequel $b/R = 0,4$ ayant une aimantation dont $i = 0^\circ$.

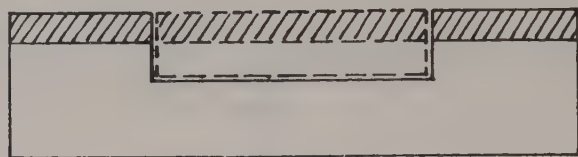


FIG. 32.

Les calculs, effectués pour deux épaisseurs du disque, donnent pour la variation de ε au voisinage de la cavité, et pour la valeur de ε au point de la zone nord où l'anomalie doit s'annuler :

pour $b/R_0 = 0,2$ (soit $b/R_{A'} = 0,1$)
variation 1,65 $\varepsilon = 0,01.2\Pi\mathcal{J}$;

pour $b/R_0 = 0,1$ (soit $b/R_{A'} = 0,05$)
variation 1,73 $\varepsilon = 0,05.2\Pi\mathcal{J}$.

Si le premier résultat est très satisfaisant, nous notons cependant que le second est aussi très proche de la valeur 1,65 cherchée. Il nous est difficile de pousser plus loin l'analyse en raison de l'influence de la couronne supérieure et de celle du tronc de cône extérieur.

Il nous reste donc à faire en quelques points la somme des influences des parties constituantes de notre cône volcanique. Nous avons admis, dans le cas de la courbe (a) de la *figure 23*, une inclinaison unique de 0° sauf pour le disque hachuré dans la *figure 32*. Cette courbe est assez proche de celle observée sur le terrain.

Afin de rechercher s'il n'y avait pas d'autres solutions possibles, nous avons essayé des répartitions différentes de l'inclinaison qu'il serait fastidieux d'énumérer ici. Retenons-en seulement le cas où l'inclinaison est uniforme et égale à -30° . Le principal défaut de la courbe (b) obtenue est d'être trop basse et nous n'avons pas la possibilité de la remonter.

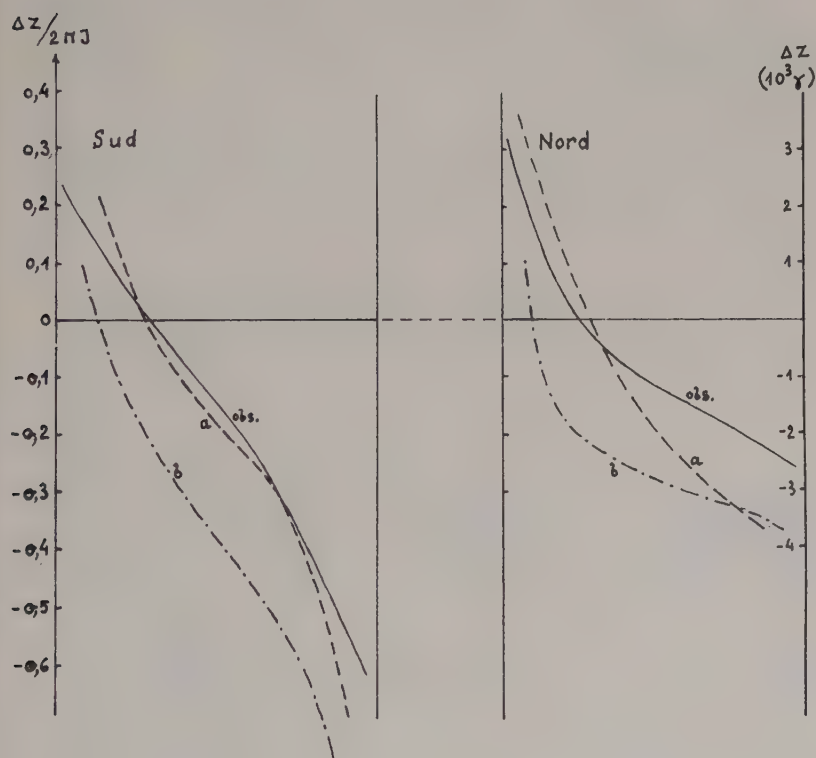


FIG. 33.

c) Anomalies de la plate-forme inférieure

Nous observons, sur la *figure 23* que ces anomalies ont la même forme générale que celles de la plate-forme précédente, avec une légère différence due à ce que la cavité, ici, est plus profonde dans sa partie ouest (présence du lac de lave), ce qui entraîne une extension des isanomales. Aussi, malgré les apparences, il ne nous semble pas justifié de considérer le vecteur aimantation dans un plan différent de celui admis pour la plate-forme supérieure. Nous allons donc examiner ces anomalies sur le profil suivant l'axe nord-sud déjà choisi.

Comme pour la plate-forme précédente l'influence du relief sur les anomalies comporte essentiellement celle de la couronne supérieure et celle du trou central. Mais nous pouvons prévoir un effet de paroi plus considérable, le rayon extérieur de la couronne, cette fois, étant grand, et la paroi plus verticale. De plus, la plate-forme étant étroite, nous avons un gradient considérable de l'anomalie.

Examinons en premier lieu l'effet de paroi sans tenir compte de la région inférieure afin d'avoir plus de liberté pour la suite de notre analyse. Pour deux cylindres P et P' (*fig. 34*), la composante verticale du champ en A sera la somme des composantes.

$$[P] - [P'] - [C] + [C'] \quad \text{où} \quad [P] = -[P'] = 2\pi \mathcal{J}_z$$

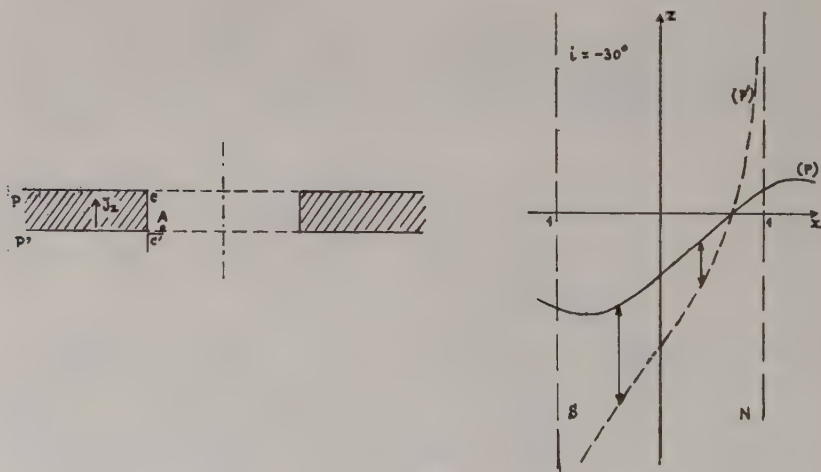


FIG. 34.

Pour des rayons de P et P' infinis, l'effet de paroi est représenté par l'écart entre les deux courbes correspondantes aux cotes de C et C' . Nous voyons immédiatement que l'allure de la variation de cet effet est bien celui observé. N'ayant pas réellement des rayons infinis, nous apporterons, par la suite, la correction nécessaire. Remarquons que si nous avions bien pour la plate-forme supérieure un cas analogue, il n'était cependant pas possible de faire une estimation aussi rapide de l'influence en raison de la section triangulaire de l'anneau.

Examinons en premier lieu le cas le plus simple, soit une distribution uniforme de l'inclinaison de -30° .

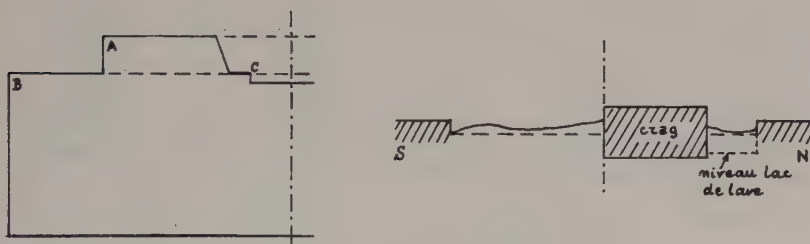


FIG. 35.

Les influences seront celles de l'anneau supérieur A , d'un cylindre B et d'une cavité C dans laquelle nous plaçons le *crag* (fig. 35). Nous remplacerons ce dernier par un petit cylindre tel que $b/R = 1$ et placé comme le montre le schéma.

Nous avons ainsi obtenu, en admettant pour C la valeur $b/R = 0,1$ (profondeur observée) la courbe (a) de la figure 36, que des variations de cette valeur b/R n'ont pu améliorer.

Nous avons donc repris la distribution de l'inclinaison trouvée pour A dans l'étude des anomalies de la plate-forme supérieure, et admis pour le *crag* une inclinaison de -30° .

En n'utilisant seulement que l'influence de la couronne, celle de la cavité ($b/R = 0,1$), et celle du *crag*, nous avons trouvé des résultats (courbe b) analogues à ceux observés. Si nous voulons conserver cette courbe, il nous faut admettre une influence négligeable de la partie inférieure, en dehors de la

couche mince avec $i = -30^\circ$ correspondant à la profondeur α C admise. Or nous ne pouvons avoir une telle influence que

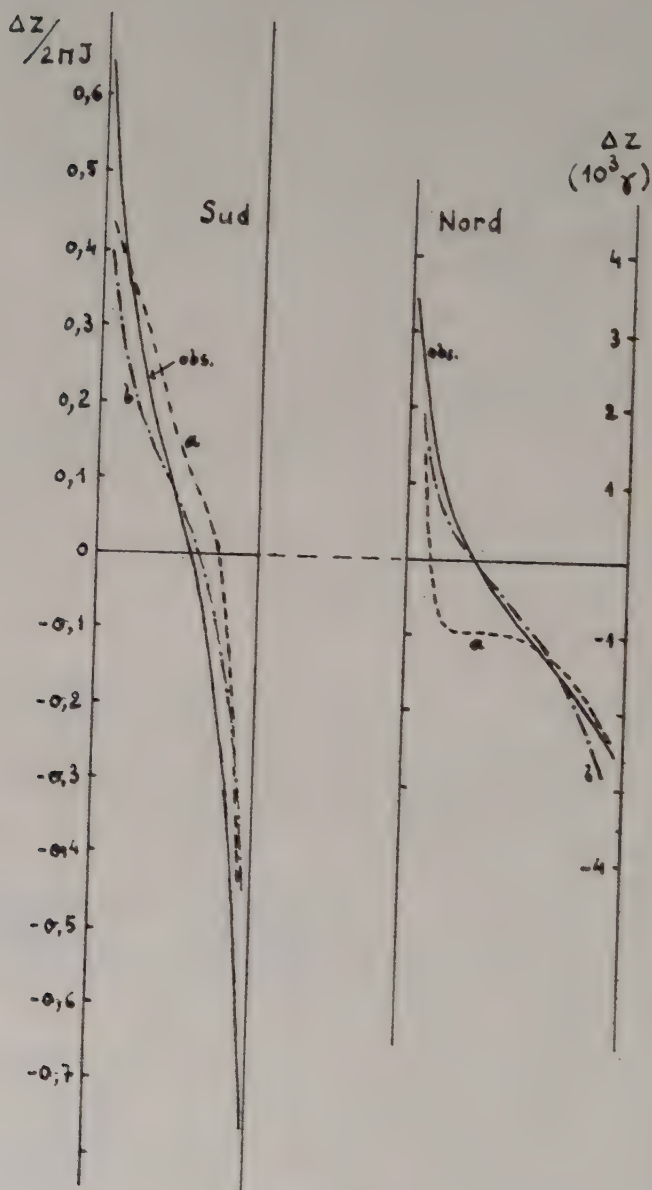


FIG. 36.

pour un vaste tronc de cône avec $i = 0^\circ$ ou une vaste poche de lave en fusion. De toute manière il ne nous semble pas possible d'admettre la présence d'un cylindre avec $i = -30^\circ$ qui abaisserait notablement l'ensemble de la courbe sauf pour une très faible hauteur de ce cylindre. Nous l'avons d'ailleurs effectivement observé sur de nombreuses autres possibilités envisagées.

d) Anomalies du *crag*

Nous remarquons tout d'abord sur la *fig. 23* que le tracé des isanomaes du *crag* est assez discutable notamment au nord et au sud. Il en résulte un profil Nord-Sud de l'anomalie peu précis dont nous retiendrons seulement l'allure générale et le fait que le niveau moyen de l'anomalie vers le centre du profil est voisin de zéro.

D'autre part, le relief du *crag* montre des effondrements successifs que nous pouvons simplifier et schématiser dans la direction Nord-Sud par deux cylindres verticaux juxtaposés D et D' ayant chacun un rayon de 70 mètres et entre eux une dénivellation d'une vingtaine de mètres (*fig. 37*).

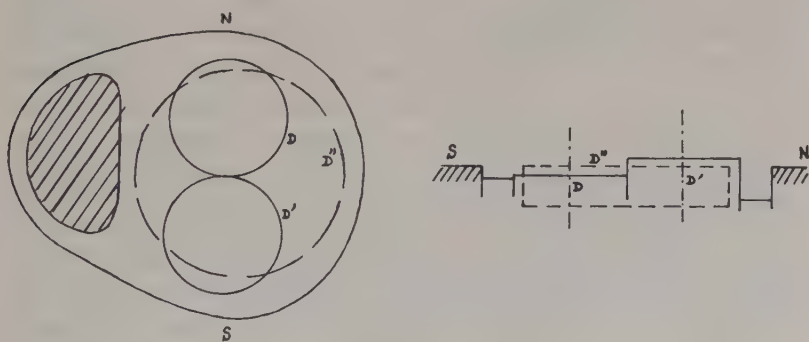


FIG. 37.

Pour ces deux cylindres auxquels nous ramenons le *crag* nous admettons une aimantation uniforme. De plus nous supposons une inclinaison de cette aimantation de -30° car selon toute vraisemblance le *crag* est une partie de la plate-forme inférieure de formation toute récente.

Faisons cependant la remarque que le bloc nord ayant sa face supérieure inclinée de 20° , il en résulte que l'inclinaison admise est modifiée, ce dont nous ne tiendrons pas compte, non plus d'ailleurs des éboulis formant le contour du *crag*.

Voyons maintenant quelle est l'anomalie qu'il est possible d'observer dans le plan passant par les axes des deux cylindres. Pour cela nous allons examiner séparément le champ des deux parties du cône volcanique situées de part et d'autre d'un plan horizontal passant par la base apparente du *crag*.

Admettons que la distribution de l'inclinaison à l'intérieur de la couronne supérieure soit celle trouvée dans l'étude des plates-formes. La composante verticale de son champ sur le *crag* est représenté par la courbe (a_1) de la figure 38.

Nous remarquerons ici que si nous assimilons le *crag* à un disque D'' de rayon 125 m aimanté avec $i = -30^\circ$, son épaisseur doit être de l'ordre 0,3 à 0,4 fois son rayon pour amener la partie centrale de la courbe (a_1) au niveau zéro. Cette épaisseur étant voisine de celle que nous pouvons observer, nous sommes amenés à envisager l'influence de la partie inférieure du cône volcanique comme celle d'un bloc homogène. Si le tronc de cône qu'elle constitue (demi-ouverture: 60° , rapport des bases 0,5) est aimanté avec $i = -30^\circ$ son influence est sensiblement égale et de signe contraire à celle de la couronne supérieure déjà vue. Cette influence étant constante dans toute la région du *crag*; nous ne pouvons penser à supprimer l'effet du disque car la courbe résultante obtenue serait de la même forme que (a_1).

Pour une aimantation avec $i = 0^\circ$, l'influence du tronc de cône est nulle. Il nous reste alors la courbe (b_1), somme des influences de la couronne et du disque.

L'identité de forme entre cette courbe et celle de l'anomalie mesurée confirme, à première vue, l'hypothèse d'une aimantation à inclinaison nulle pour la partie inférieure du cône volcanique.

Examinons de plus près la composante verticale du champ du *crag* assimilé à des cylindres de profondeur infinie. Elle présente (courbe a) au-dessus de la génératrice commune une

discontinuité que nous supprimons en rendant le passage d'un cylindre à l'autre progressif, autrement dit en supprimant la discontinuité entre les cotes des faces supérieures.

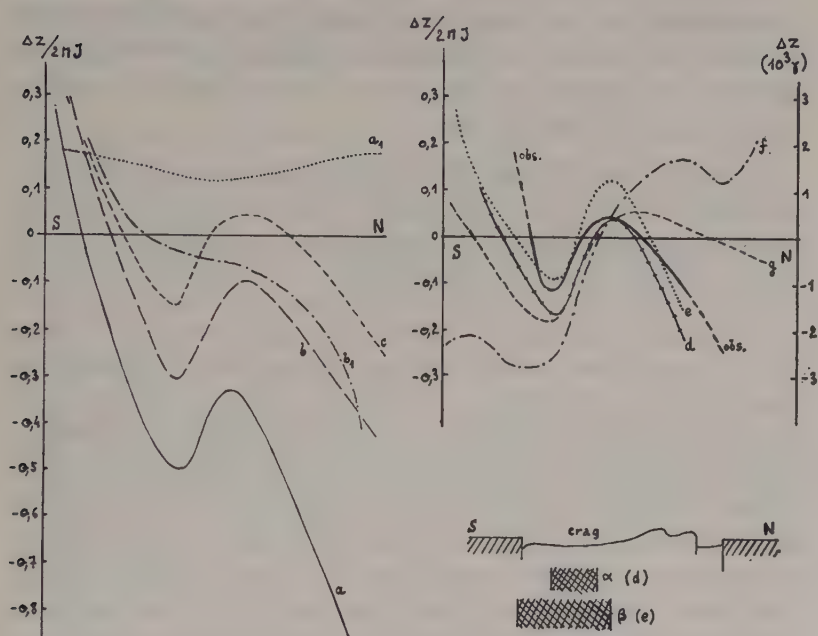


FIG. 38.

En y ajoutant les ordonnées de la courbe (a_1), nous obtenons la courbe (b) dont la partie centrale est négative. Le plus efficace moyen de la relever est de réduire la profondeur des cylindres, et nous en arrivons pour obtenir la courbe (c) à admettre une épaisseur du cylindre A de 35 m, soit de 55 m pour le cylindre B, leur base étant supposée sur un même plan horizontal.

Comme il nous est impossible de réduire davantage — l'épaisseur de la partie visible du *crag* étant d'une cinquantaine de mètres — et que notre courbe (c) est encore un peu trop basse, il nous faut utiliser la partie inférieure du cône et il est logique de le faire en envisageant la présence de lave en fusion sous le *crag*. Remarquons que si nous admettons que l'aimantation

induite de cette lave est négligeable vis-à-vis de l'aimantation thermorémanente des parties solidifiées, nous pouvons assimiler le volume occupé à un vide.

Supposons d'abord que le tronc de cône inférieur ait une aimantation avec $i = -30^\circ$. Un cylindre creux dans cette partie du cône nous permet de remonter la courbe, mais à moins de donner à ce cylindre un très grand diamètre, la déformation de la courbe est considérable.

Si l'inclinaison du tronc de cône est nulle, son influence dans la région du *crag* est négligeable, mais il n'en sera plus de même si nous imaginons un cylindre vertical dans ce tronc de cône remplacé par de la lave liquide.

Encore faut-il que ce trou soit situé au nord du *crag*. Le calcul fait pour deux trous différents, de profondeur infinie, de diamètre 80 et 160 mètres (α et β sur la *figure 38*) donnent respectivement les courbes (*d*) et (*e*). La courbe (*d*) semble plus favorable. Nous nous gardons bien cependant d'en déduire qu'une cheminée de lave se trouve à cet endroit, car le faible déplacement de la courbe (*c*) qu'elle provoque est du même ordre de grandeur que l'imprécision de la courbe des anomalies étudiées et l'erreur sur la valeur « normale » de Z adoptée pour l'endroit peut bien être de quelques centaines de gammas.

Nous pouvons remarquer que l'existence possible d'un cylindre creux à l'est ou à l'ouest de notre axe Nord-Sud pris sur le *crag* n'a qu'une influence faible ou nulle sur la composante verticale mesurée sur cet axe. Ajoutons à ce sujet que l'excès déjà mentionné du gradient de l'anomalie observé au nord et au sud du lac de lave est bien de l'ordre de celui amené par un cylindre creux de profondeur infinie situé à l'emplacement de ce lac et de même surface. En effet, à une distance $x/R = 1,5$, l'influence de la cavité visible ($b/R = 0,4$ environ) est négligeable, et celle pour une profondeur infinie est de l'ordre de $0,2 \cdot 2\pi \mathcal{J}$. En admettant pour $\mathcal{J}$ une valeur voisine de $150 \cdot 10^{-4}$, valeur déjà citée et sur laquelle nous reviendrons par la suite, l'excès correspondant de l'anomalie, de 2000γ , est bien de l'ordre de celui observé.

Nous pouvons encore nous demander s'il existe au-dessous du *crag* une épaisseur appréciable de lave en fusion. Nous traçons pour cela les courbes (f) et (g) correspondant respectivement à des cylindres de même rayon que le *crag*, de profondeur infinie et d'une profondeur égale à la moitié du rayon du *crag*. Nous pouvons en déduire que l'épaisseur est inférieure à cette dernière quantité.

Pour conclure, disons que dans l'ensemble nos mesures faites sur le *crag* sont trop influencées par les irrégularités du relief de ce dernier et par les effets des parois du cratère pour permettre de supposer autre chose qu'une inclinaison quasi nulle de l'aimantation de la partie inférieure du cône volcanique et l'absence d'une cheminée proche de lave dans l'axe du puits.

e) Résultats et discussion

A partir de l'ensemble des interprétations des anomalies du cône, des plates-formes et du *crag*, nous obtenons un schéma du volcan (*fig. 39*) où nous distinguons les parties ayant une inclinaison de -30° (zones hachurées) et celles ayant une inclinaison nulle.

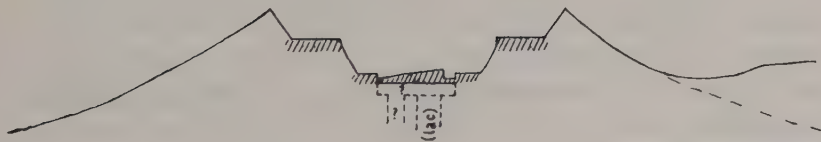


FIG. 39.

Disons tout de suite que notre exposé de l'interprétation ne reflète pas la quantité de travail qu'elle a nécessitée. Nous ne sommes parvenus à cette répartition des inclinaisons de l'aiman-

tation — répartition qui peut sembler trop bien précisée — qu'après un grand nombre d'essais, soit d'études des caractéristiques des courbes du profil de l'anomalie, soit des répartitions possibles de l'inclinaison. Nous ne pouvons évidemment prétendre avoir tout envisagé, mais nous pouvons affirmer que nous n'avons pas affaire à une aimantation uniforme de 0 ou -30° , ni pour le cône volcanique entier, ni même pour des cylindres de hauteur importante.

Nous avons obtenu *une* interprétation. Elle n'a, évidemment, pas été faite sans tenir compte, au moins en partie, de données expérimentales (inclinaisons mesurées au laboratoire) et d'hypothèses volcanologiques (formation des plates-formes). Sans doute la répartition réelle des inclinaisons n'est-elle pas aussi nette. Faute de valeurs nombreuses et précises de l'aimantation (direction et intensité) des constituants du volcan nous avons dû admettre une aimantation uniforme pour des volumes considérables, uniformité qui n'est peut-être qu'apparente.

Voyons maintenant ce que nous pouvons tirer de notre interprétation:

a) *Sur l'intensité de l'aimantation*

Nous savons que les laves, pendant leur refroidissement, s'aimantent suivant le champ terrestre de l'époque, prenant ainsi une aimantation thermorémanente (ou encore permanente) $\mathcal{J}_r$. Cette aimantation, suivant la nature et le type de la roche (conditions encore mal définies) peut se conserver ou s'altérer avec le temps [14]. Parmi les échantillons prélevés au Nyiragongo, cinq d'entre eux ont été étudiés par L. KOENIGSFELD (travaux non publiés). Il a été trouvé une bonne stabilité de la direction de l'aimantation qui montre que cette aimantation ne semble pas avoir été influencée par le traînage dans le champ magnétique actuel.

D'autre part, nous avons l'aimantation induite $\mathcal{J}_i$ dans la roche par le champ terrestre actuel.

L'aimantation résultante s'exprime alors par:

$$\vec{\mathcal{J}} = \vec{\mathcal{J}}_r + \vec{\mathcal{J}}_i$$

Nous pouvons déduire cette valeur de $\mathcal{J}$ des courbes des figures 28, 33, 36, 38 de notre interprétation. Les courbes obtenues par le calcul coïncident sensiblement avec celles observées en adoptant l'équivalence $0,1.2\Pi = 1000 \gamma$, soit: $\mathcal{J} = 160.10^{-4}$ u.e.m. avec une précision de 10 à 20 %, qui est celle de l'accord entre les courbes.

Évaluons maintenant l'aimantation induite. Nous avons:

$$\mathcal{J}_i = kH$$

ou k est la susceptibilité magnétique du corps et H le champ terrestre.

De la valeur moyenne de la susceptibilité massique χ déjà citée (2200.10^{-6}) et de la densité 3, nous obtenons la valeur:

$$k = 6600.10^{-6}$$

ce qui, pour un champ terrestre de 0,35 gauss, nous donne:

$$\mathcal{J}_i = 6600.10^{-6}.0,35 = 23.10^{-4} \text{ u.e.m.}$$

Nous obtenons donc un ordre de grandeur de $\mathcal{J}_r$:

$$\mathcal{J}_r = 160.10^{-4} - 23.10^{-4} = 137.10^{-4} \text{ u.e.m.}$$

valeur qui est très voisine de celles mesurées au laboratoire (2^{me} partie, paragraphe 2).

Nous pouvons même préciser $\mathcal{J}_r$ si nous admettons que sa direction moyenne fait un angle de 30° avec l'aimantation induite.

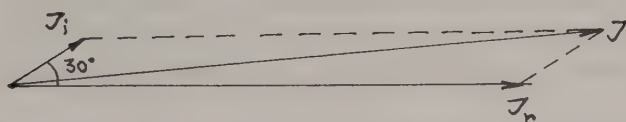


FIG. 40.

Nous obtenons dans ce cas $\mathcal{J}_r = 140.10^{-4}$, valeur peu différente de la précédente en raison de la grande différence entre les valeurs de $\mathcal{J}_r$ et $\mathcal{J}_i$. Le rapport des aimantations permanente et induite:

$$\mathcal{J}_r/\mathcal{J}_i = 7$$

justifie d'ailleurs le fait d'avoir admis dans notre interprétation

des inclinaisons de 0° et -30° . Ce rapport est bien de l'ordre de ceux déjà trouvés dans les études de laves basaltiques (travaux de T. NAGATA [6], E. THELLIER [14]) pour lesquelles l'aimantation thermorémanente est forte vis-à-vis de l'aimantation induite.

b) *Sur la direction et le sens de l'aimantation*

Les spécimens étudiés au laboratoire, nous l'avons vu, indiquent une différence de l'ordre de 30° entre les inclinaisons de l'aimantation de roches, disons anciennes, et de lave plus récente. Nous pouvons dire que le prélèvement ayant été fait dans une seule région du cratère, ces échantillons peuvent ne pas représenter l'ensemble du volcan. Mais tout en regrettant de ne pas disposer de plus de données représentant la stratification des différentes couches de lave, nous devons constater que la direction de l'aimantation trouvée par interprétation est bien celle des spécimens (cependant mieux pour l'inclinaison que pour la déclinaison).

Nous pouvons regretter tout autant de ne rien savoir de précis sur la date de mise en place des laves anciennes du volcan Nyiragongo. Comme il semble admis que ce volcan date du quaternaire, nous ne pouvons que retenir cette époque, ce qui est bien vague et supprime toute contribution au paléomagnétisme. Inversement, d'ailleurs, nous pouvons conclure que le Nyiragongo est un volcan jeune, si nous nous appuyons sur des travaux récents relatifs à la direction du champ terrestre, d'après lesquels ce champ aurait été « direct » pendant tout le quaternaire moyen et supérieur, inverse au début du quaternaire [11].

c) *Sur les transformations du cratère*

Le schéma du volcan déduit de l'interprétation ne nous permet guère de préciser l'évolution du cratère antérieure aux observations visuelles récentes.

Cependant, le fait de retrouver une inclinaison nulle entre les deux plates-formes situe la formation de la plate-forme supérieure à une époque très reculée. Nous ne serons toutefois pas affirmatifs, car la différence constatée à l'interprétation,

selon que nous admettons $i = 0^\circ$ ou -30° , est relativement faible.

Par ailleurs, l'absence au-dessous de la plate-forme inférieure d'un vaste bloc de lave refroidie récemment nous incite à penser que le volcan est demeuré inactif pendant très longtemps ou bien a maintenu une activité excessivement modérée.

Des variations continues de niveau de la lave dans la cheminée, sans accumulation considérable de lave liquide dans le cône volcanique, pourraient très bien expliquer le recouvrement de la plate-forme supérieure et la formation de la plate-forme inférieure. Il y aurait donc très longtemps que le niveau de la lave, à quelques centaines de mètres près, n'a pas changé à l'intérieur du cône.

CONCLUSION

Nous avons essayé, dans ce travail, de déterminer les corrections topographiques à apporter aux anomalies observées sur un volcan au relief accidenté mais géométriquement assez simple. Ceci nous a amené à calculer le champ d'un cylindre et d'un cône de révolution et, dans les deux cas, au moins pour la composante verticale de l'anomalie, nous avons donné des courbes permettant d'arriver rapidement au résultat. Nous pouvons espérer qu'elles seront utilisées dans d'autres études semblables car l'effet du relief sur les anomalies magnétiques des volcans est souvent considérable.

Cette influence topographique doit être déterminée le plus exactement possible, et alors seulement les résultats obtenus par la prospection magnétique sont significatifs.

Dans le cas du Nyiragongo, il nous a ainsi été possible d'obtenir davantage qu'une moyenne des effets des diverses parties constituant le volcan. En effet, notre interprétation a fait apparaître la superposition de deux laves à inclinaisons de l'aimantation différentes et aucune hétérogénéité de l'aimantation des corps sous-jacents. De plus, elle nous a permis d'obtenir une intensité d'aimantation moyenne identique à celle des échantillons pourtant prélevés en un seul site, et même de confirmer certaines hypothèses sur la formation des plates-formes.

Grâce à la régularité du relief, il nous a été possible, en majeure partie par des considérations topographiques, d'interpréter toutes les anomalies.

Ne regrettons pas d'y être parvenu sans avoir fait apparaître la présence de la vaste poche de lave que l'on aurait pu imaginer sous l'îlot et espérons qu'une évolution possible du volcan permette de confirmer un jour notre interprétation.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BONNET, G.: Levé magnétique du volcan Nyiragongo, (*Bulletin des Séances de l'ARSOM*, Bruxelles, VI, 1960, 3, p. 489-504).
- [2] COULOMB, J.: L'anomalie magnétique du Puy-de-Dôme (*Bull. Inst. Phy. du Globe du Puy-de-Dôme*, 6, 65, 1933).
- [3] MINAKAMI, T.: Magnetic surveys of Volcano Kusatu-Sirane (*Bull. Earth. Res. Inst.*, vol. 16, 1938).
- [4] — : Magnetic surveys of Volcano Asana (*Bull. Earth Res. Inst.*, vol. 18, 1940).
- [5] — and SAKUMA, S.: On magnetization of Mt. Fuji and other Volcanoes in Japan (*Bull. Volc.*, vol. 18, 1956).
- [6] NAGATA, T.: Magnetic anomalies around volcanic craters (*Bull. Earth Res. Inst.*, vol. 16, 1938, p. 288-299).
- [7] NETTLETON, L.L.: Gravity and magnetic calculations (1942).
- [8] PRESS, F. and EWING, M.: Magnetic anomalies over oceanic structures (*Trans. Amer. Geoph. Union*, n° 3, vol. 33, 1952).
- [9] RIKITAKE, T.: The distribution of magnetic dip in Ooshima Island and its change that accompanied the eruption of volcano Mihara, 1950 (*Bull. Earth. Res. Inst.*, vol. 29, 1951).
- [10] — and YOKOYAMA, I.: Volcanic activity and changes in geomagnetism (*Jour. of Geoph. Res.*, n° 2, vol. 60, 1955, p. 165-172).
- [11] ROCHE, A.: Sur les variations de direction du champ magnétique terrestre au cours du quaternaire (*C.R.A.S.*, Paris, t. 246, juin 1958, p. 3 364-3 366).
- [12] SAHAMA, G. and MEYER, A.: Study of the volcano Nyiragongo (Institut des Parcs Nationaux Congo Belge, Bruxelles, 1958).
- [13] TAKAHASI, R. and HIRANO, K.: Changes on vertical intensity that accompanied the eruption of Miyakezima, in 1940 (*Bull. Earth. Res. Inst.*, vol. 19, 1941).
- [14] THELLIER, E.: Sur l'aimantation des terres cuites et ses applications géophysiques (*Annales Inst. Phys. du Globe*, vol. 16, 1938, Paris, p. 157-302).
- [15] YOKOYAMA, I.: Geomagnetic Anomaly on volcanoes with relation to their subterranean structure (*Bull. Earth. Res. Inst.*, vol. 35, Part 2, 1957, p. 327-357).
- [16] — : Sulla distribuzione del campo geomagnetico all'isola di Stromboli (*Geop. e Meteorologia, Geneve*, vol. 7, n° 3-4, 1959, 3 p.)

- [17] — : Anomalie geomagnetiche sul Vesuvio (*C.R.A.S. Naples*, 1960, Série 4, vol. 27, p. 340-351).
- [18] WISER, P.: Levé photogrammétrique du cratère du Nyiragongo (*Bull. des Séances de l'ARSOM*, 1961, N.S., T. VII, fasc. 6, p. 950-955).

Table des matières

RÉSUMÉ	1
SAMENVATTING	1
AVANT-PROPOS	3
INTRODUCTION	5

PREMIERE PARTIE

Champ magnétique des corps de révolution uniformément aimantés

CHAPITRE I : Champ magnétique d'un cylindre vertical illimité vers le bas	11
I - 1 : Calcul de la composante verticale ΔZ du champ	11
a) Influence $(\Delta Z)^Z$ de la composante verticale de l'anomalie	12
b) Influence $(\Delta Z)^X$ de la composante transversale de l'anomalie	17
c) Valeur totale de la composante verticale	26
I - 2 : Calcul de la composante horizontale du champ	28
a) Influence $(\Delta X)^Z$ de la composante verticale de l'aimantation	28
b) Influence $(\Delta X)^X$ de la composante transversale de l'aimantation	28
c) Influence $(\Delta Y)^Z$ de la composante verticale de l'aimantation	35
d) Influence $(\Delta Y)^X$ de la composante transversale de l'aimantation	36
I - 3 : Anomalies provoquées par le cylindre	38
CHAPITRE II : Champ magnétique d'un cône de révolution aimanté uniformément	40
1. — Expression générale	40
2. — Composante verticale du champ d'une plaque mince circulaire	42
a) Influence $(\Delta Z)^Z$ de l'aimantation verticale	42
b) Influence $(\Delta Z)^X$ de l'aimantation transversale	52
c) Application à un tronc de cône	54

DEUXIEME PARTIE

Application au volcan Nyiragongo *Etude des anomalies de la composante verticale*

1. — Anomalies observées sur le volcan	61
2. — Considérations préliminaires à l'interprétation	62
3. — Interprétation	68
a) Anomalies du cône	69
b) Anomalies de la plate-forme supérieure	71
c) Anomalies de la plate-forme inférieure	76
d) Anomalies du <i>crag</i>	79
e) Résultats et discussion	83
CONCLUSION	89
BIBLIOGRAPHIE	91
TABLE DES MATIÈRES	93

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

La rapidité de la recombinaison électronique dans la région E de l'ionosphère.

Vu et approuvé :

Paris, le 4 juin 1962

Le Doyen de la Faculté des Sciences

Marc ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

